FILOSOFÍA. 1º DE BACHILLERATO.

6. Introducción a la Lógica.

"Esta frase es falsa.".

Año Escolar 2018/19

Índice del tema 6.

1 Los problemas lógicos del lenguaje natural.

Quizá la característica más definitoria del ser humano sea su capacidad de pensamiento. Nuestro pensamiento se expresa generalmente en forma de oraciones a través del denominado lenguaje natural.

El **lenguaje natural** es el lenguaje con el que normalmente nos expresamos, en nuestro caso el castellano. La capacidad expresiva del lenguaje natural permite enunciar sentimientos, narrar acontecimientos, dar órdenes, formular razonamientos, etc.

La función del lenguaje natural que nos interesa aquí es la de realizar argumentaciones. Y aunque estas se expresan normalmente en el lenguaje natural, sin embargo, ese mismo lenguaje tiene tal riqueza expresiva que, aunque le hace enormemente útil como vehículo comunicativo, le hace inadecuado para estudiar en él las argumentaciones.

Se trata de señalar qué propiedades presentan los lenguajes naturales que les hacen especialmente inapropiados para estudiar en ellos las argumentaciones o deducciones.

1.1 Ambigüedad: polisemia y homonimia.

Una expresión lingüística es **ambigua** cuando puede significar cosas distintas. La ambigüedad es una característica típica de los lenguajes naturales.

La ambigüedad en el lenguaje escrito ocurre cuando varias palabras, o expresiones, que mantienen significados diferentes se expresan con los mismos signos gráficos.

> Por ejemplo la palabra "banco", que puede referirse a un mueble para sentarse o a un establecimiento financiero.

Cuando el segmento lingüístico ambiguo es una sola palabra hablamos de **equivocidad**.

> Por ejemplo, el término "hombre" puede designar al ser humano en general o al subconjunto de los varones. O la palabra "gato" puede querer referirse al animal o una herramienta para levantar pesos.

Si el segmento lingüístico ambiguo es una oración se denomina **anfibología**:

> Por ejemplo, la oración "El libro de Torrente Ballester es rojo" puede querer designar un libro escrito por Torrente Ballester, o un libro de su propiedad.
>
> Otro ejemplo podría ser "El perro de Paulov es listo", que puede estar refiriéndose a un perro cuyo propietario sea Paulov, o bien estar llamando a Paulov "perro".

La ambigüedad que permite el lenguaje natural puede provocar que argumentos incorrectos pasen por correctos.

> Un ejemplo de esto es el argumento del encubierto. Ese argumento dice lo siguiente: "tú no conoces a esa persona cubierta por un velo, pero esa persona es tu padre; luego tú no conoces a tu padre."
>
> Ese argumento es un caso de anfibología que se basa en que la oración "tú no conoces a esa persona cubierta por un velo" puede significar dos cosas:

a. Tú no conoces a esa persona por estar cubierta por un velo
b. Tú no conoces a esa persona independientemente de que lleve o no velo.

Cuando se nos dice "tú no conoces a esa persona cubierta por un velo" entendemos que esa premisa es verdadera porque estamos entendiendo el significado a., pero cuando se concluye: "luego tú no conoces a tu padre" se está concluyendo a partir del significado b.

1.2 Sinonimia.

El principal problema de la sinonimia quizá se encuentre en las dificultades que presenta precisar con claridad su significado.

Lo primero sería distinguir las expresiones sinónimas de aquellas expresiones que meramente se estén refiriendo a las mismas cosas. Para que dos expresiones sean sinónimas deben de estar refiriéndose a las mismas cosas o hechos, pero aunque eso es necesario que ocurra, aún no es suficiente.

Por ejemplo, la expresión "el autor de las Novelas Ejemplares" y la expresión "el autor del Quijote" designan al mismo individuo —Cervantes, pero eso no las hace sinónimas, ya que significan cosas diferentes, aunque se refieran al mismo sujeto.

Y así, dos expresiones son sinónimas cuando no sólo tienen el mismo referente sino que se refieren a él con el mismo sentido; es decir, tienen el mismo significado.

Sin embargo, eso no evita los problemas. Puede haber palabras con el mismo referente y que comparten algún significado pero que, debido a las connotaciones –significados asociados que el uso pragmático del lenguaje conlleva- sigan sin compartir todos sus significados, y por tanto sigan si ser sinónimas.

Por ejemplo, las palabras "confidente" y "chivato" parecen referirse y tener el mismo sentido, pero la palabra "confidente" no incluye en su uso ninguna carga peyorativa, mientras que "chivato" sí. La expresión "Juan es un confidente", dicha por un policía, no conlleva ninguna visión negativa de Juan, pero la expresión "Juan es un chivato", dicha por un delincuente, sí lo hace. Si en una argumentación del lenguaje natural tuviéramos algo así como:

Si el comisario Juan insulta a Luis éste se enfada.
"Chivato" es un insulto
El comisario Juan llamó "confidente" a Luis

¿Tendríamos que concluir que "Luis se enfada"? Aunque las premisas sean verdaderas no se sigue necesariamente esa conclusión.

Por eso para precisar el significado de sinonimia habría que señalar que dos expresiones son sinónimas si tienen el mismo referente, sentido y connotación. Pero las connotaciones son significados especiales que se asocian a la palabra dependiendo de los contextos, en ocasiones subjetivos, en los que se da. Señalar dos palabras de un mismo idioma, que tengan la misma connotación para todos los contextos, parece imposible.



1.3 La autorreferencialidad.

Los lenguajes naturales no disponen de una sintaxis precisa que proporcione un conjunto de reglas completo para la formación de enunciados.

> Por ejemplo, la sintaxis afirma que para formar oraciones del castellano hay que poner un sujeto y un predicado. Pero eso es insuficiente, porque la siguiente expresión: "mesa resume temblorosamente" respeta esa regla sintáctica, pero no es una oración con sentido del castellano.

Para solucionar esas deficiencias los gramáticos de los lenguajes naturales apelan al "buen sentido" de los hablantes. Pero a la hora de estudiar argumentaciones ese "buen sentido" deja de ser suficiente.

En cualquier caso, la ausencia de reglas precisas sobre la formación de oraciones en los lenguajes naturales hace que éstos puedan utilizarse para hablar de sí mismos; es decir, puedan ser autorreferenciales.

Y es esa autorreferencialidad la que permite la aparición de paradojas como la paradoja del mentiroso.

Existen muchas formulaciones de la paradoja del mentiroso, la más clásica es la siguiente: "Esta frase es falsa".

Si la frase entrecomillada es verdadera entonces es que, como ella misma dice, es falsa; lo que es contradictorio, ya que si es verdadera es falsa. Pero si la frase entrecomillada fuera falsa, entonces es que lo que ella dice no es cierto, pero lo que dice es que es falsa, luego como eso no es cierto tendrá que ser verdadera; con lo que de nuevo llegamos a una contradicción: si es falsa es verdadera.

> Una forma distinta de esa misma paradoja es la siguiente:
>
> 1. "La oración de abajo —la numerada como 2— es verdadera"
> 2. "La oración de arriba —la numerada como 1— es falsa"
>
> Si suponemos que 1 es verdadera, entonces, como ella misma dice, es que 2 también lo es; pero 2 dice que 1 es falsa, luego si 1 es verdadera es que es falsa. Y si suponemos que 1 es falsa es que lo que dice no es cierto, pero 1 dice que 2 es verdadera, luego como suponemos que 1 es falsa 2 no será verdadera, sino falsa; y si 2 es falsa lo que dice 2 no será cierto, pero 2 dice que 1 es falsa, y como eso no puede ser cierto sale que 1 tiene que ser verdadera; luego si suponemos que 1 es falsa sale que 1 es verdadera, lo que también es contradictorio[1].
>
> Una tercera formulación de la misma paradoja del mentiroso se da en el conjunto de las tres siguientes oraciones:
>
> 1. "Esta oración contiene cinco palabras."
> 2. "Esta oración contiene ocho palabras."
> 3. "Una de las tres oraciones —y sólo una—es verdadera."

---

1 Esta versión se basa, esencialmente, en la conocida como la Tarjeta de Jourdain en honor del matemático inglés que la ofreció en 1913 como versión de la paradoja del mentiroso.

> La cuestión está en si la oración número 3 es verdadera o falsa. Siendo la número 1 siempre verdadera y la 2 siempre falsa, ocurre que si 3 fuera verdadera entonces sería falsa, ya que ella dice que sólo una de las tres oraciones es verdadera y entre la 1 y la 3 serían dos oraciones verdaderas. Pero si decimos que 3 es falsa, entonces ocurre que lo que ella dice se hace verdad, ya que entre las tres sólo una, la número 1, sería verdadera, y eso es lo que dice 3, pero entonces 3, si dice lo que ocurre, no tendría que ser falsa…

En cualquiera de los casos vistos nos encontramos con una misma característica que termina por ser el origen de la paradoja, y es la capacidad del lenguaje natural para hablar de sí mismo. Y es esta posibilidad, al no evitarse por carecer de reglas precisas de formación de enunciados, la que permite generar ese tipo de paradojas.

Para resolver este tipo de paradojas deberá establecerse una distinción entre lenguaje-objeto y metalenguaje, y una prohibición basada en ella que impida tomar como una frase bien formada aquella que esté formada por la mezcla incompleta de varios.

1.3.1 Lenguaje objeto y metalenguaje

El **lenguaje objeto** es el lenguaje que habla acerca de los objetos del mundo; de los seres y las cosas que encontramos en el mundo.

Metalenguaje significa etimológicamente más allá del lenguaje, y es un lenguaje que habla acerca de lo dicho por otro lenguaje, en principio por lo dicho por el lenguaje objeto.

> Por ejemplo; "El puente está hecho de acero" es una oración del lenguaje objeto, ya que no habla sobre entidades lingüísticas, sino sobre objetos del mundo. Sin embargo, la oración que dice "La oración <El puente está hecho de acero> contiene seis palabras", es una oración que no habla sobre objetos sino sobre lo dicho por el lenguaje objeto. Y por eso se dice que esa oración está dicha en el metalenguaje del lenguaje objeto, queriendo significar con ello que el Metalenguaje es un lenguaje distinto del lenguaje objeto.

Naturalmente puede establecerse un lenguaje que hable sobre lo dicho por el metalenguaje.

A ese nuevo lenguaje se le denomina Metalenguaje I. Y de igual manera, y de forma recursiva, podemos ir generando nuevos metalenguajes de orden superior que tomen como lenguaje del que habla el metalenguaje anterior. Esto nos lleva a la **jerarquización de Tarski**, que viene a indicar que el lenguaje se organiza en jerarquías de nivel según se esté refiriendo a uno u otro nivel de lenguaje, y eso conlleva que para cualquier lenguaje, o metalenguaje, podemos construir un metalenguaje de orden superior que hable sobre él.

> La frase "Cuando leí <La oración 'El puente está hecho de acero' contiene seis palabra> comprendí la distinción entre lenguaje y metalenguaje" es una oración que habla sobre el metalenguaje, y por ello se dice de ella que pertenece a un lenguaje de orden superior: el Metalenguaje I. De similar manera podríamos crear una nueva oración, en un lenguaje superior al Metalenguaje I y que se denominaría Metalenguaje II, si nos pusiéramos a hablar de las oraciones del Metalenguaje I. Como por ejemplo: "El ejemplo que afirma <<Cuando leí <La oración 'El puente está hecho de acero' contiene seis palabras>, comprendí la distinción entre lenguaje y metalenguaje.>> es un buen ejemplo"



Pues bien, hecha esa distinción ya podemos establecer una condición para la formación de oraciones que evite la paradoja del mentiroso.

Esa regla viene a decir que toda oración bien formada tiene que serlo en un lenguaje concreto —ya sea lenguaje objeto o metalenguaje— pero no hay oración bien formada si la expresión se da en una mezcla incompleta de lenguajes.

> Y así, si recuperamos la frase paradójica "Esta frase es falsa" y la separamos en los niveles de metalenguaje, tendríamos "<Esta frase> es falsa", y entonces vemos que la expresión "Esta frase" no es una frase del castellano que pueda ser falsa o verdadera, ya que le falta el verbo, luego no es una oración bien formada.
>
> La expresión: <"El azul" es falso> sería una expresión similar, "El azul" no es una oración enunciativa, luego no puede ser ni falso ni verdadero; como mucho es una expresión poética. En este caso no se genera paradoja, pero en el anterior la expresión "Esta frase" casa con la expresión "es falsa", aunque ambas pertenezcan a niveles distintos, para formar la pseudo oración "Esta frase es falsa"

Los lenguajes naturales, como el castellano, no diferencian entre lenguaje objeto y los distintos metalenguajes, esa no diferenciación permite utilizar el castellano para hablar del propio castellano, y por tanto permite la posibilidad de generar argumentaciones paradójicas.

1.4 Discursos sin referentes.

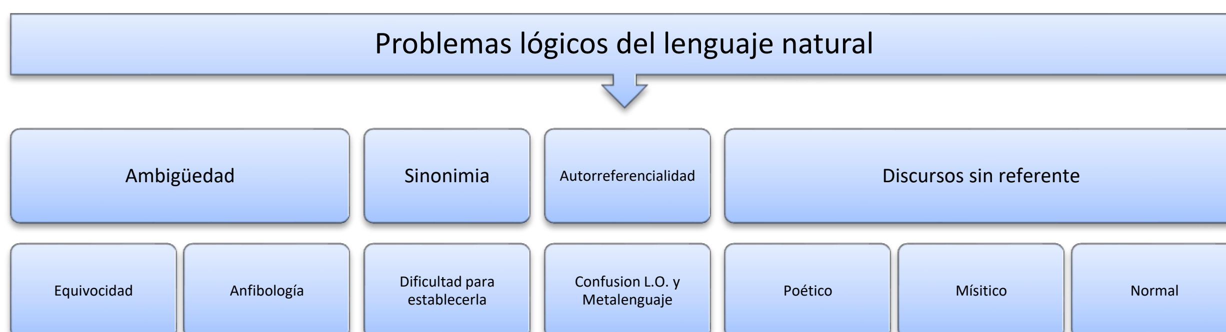
El lenguaje natural posibilita la formación de discursos que presentan una referencia vaga, o incluso que no pretende tener ninguna en absoluto; lo que se muestra en el discurso poético, místico o vulgar.

> Como en la frase: “Las verdes ideas sueñan furiosamente”.

En realidad eso no es una desventaja del lenguaje natural, lo sería si se pretendiera estudiar en él las argumentaciones por la dificultad para entender con exactitud el sentido de sus frases.

> Ejemplo de un uso del lenguaje natural que no pretende tener una referencia clara es el lenguaje poético, y el místico. Pero incluso en el supuesto uso "normal" del lenguaje se emiten discursos cuya referencia sea tan vaga e imprecisa que no acaba de decir algo.
>
> Nunca te pares en el camino,

vuélvete inexistente;
inexistente incluso a la idea de volverse inexistente.
Y cuando hayas abandonado tanto individualidad como conocimiento,
Este mundo se volverá aquel.
¡Levántate ahora! Deja de lado este mundo de bajeza
y encuentra tu camino a lo inefable;
deja de lado vida y cuerpo, fe y razón,
y en el camino hacia Dios, adquiere un alma[2]



1.5 La necesidad de un lenguaje formal.

Las características señaladas del lenguaje natural hacen necesaria la construcción de un lenguaje especial, denominado **lenguaje formal**, donde pueda expresarse con eficiencia el objeto de estudio de la lógica y se impida que esas características de los lenguajes naturales produzcan confusión y error.

Los lenguajes formales se van a caracterizar por intentar representar con claridad la forma lógica; es decir, la estructura argumentativa, que es la responsable de la formación de argumentaciones correctas. A tal fin el lenguaje lógico evitará toda materia de lenguaje cuya presencia sólo podría oscurecer y ocultar la estructura argumentativa.

Todos los lenguajes se explicitan a través de una sintaxis y de una semántica. Y así el lenguaje lógico en el que se evalúen las argumentaciones deberá tener ambos niveles.

Sin embargo, las estructuras argumentativas, por carecer de materia del lenguaje, se acercan mucho más al nivel sintáctico, o nivel de formación de estructuras, que al semántico, o nivel de significado.

Eso ha hecho que la lógica, atendiendo exclusivamente al nivel sintáctico del lenguaje formal, establezca una noción muy fecunda y de amplias repercusiones que es la noción de **cálculo**. Con ella la lógica no sólo intenta dar cuenta de las argumentaciones del lenguaje natural, sino que amplía su horizonte[3] a argumentos que van más allá de las propias argumentaciones que pueden darse en el lenguaje natural.

---

[2] (Sanai s.f.).
[3] Entendida aquí como razonamiento formal.

2 Lenguaje formal.

2.1 Argumentaciones y lógicas.

En una argumentación nos encontramos con una estructura argumentativa, que es la que vertebra de una determinada manera las palabras de la argumentación —la materia del lenguaje, permitiendo que de unas oraciones se sigan necesariamente otras.

Dentro de la materia del lenguaje pueden distinguirse entre las palabras fácticas y formales que la forman.

Las **palabras formales** son palabras especiales cuya presencia decide una estructura argumentativa u otra. Las **palabras fácticas** son aquellas que, aunque se sustituyan por otras expresiones, no se produce un cambio en la estructura argumentativa.

Por ejemplo, las dos siguientes argumentaciones:

1.	2.
Fuiste en coche o andando	Soy Julio César o soy Napoleón
No fuiste en coche	No soy Julio César
Luego fuiste andando	Luego soy Napoleón

tienen una misma estructura argumentativa, que puede representarse en el siguiente esquema:

[Cualquier oración enunciativa: p] **o** [cualquier oración enunciativa: q]

No [la oración enunciativa llamada p]

Luego [la oración enunciativa llamada q]

Pues bien, palabras formales de la argumentación 1. y 2. son "o", "no" y "luego".

Y así, si sustituimos una palabra formal, como "o", por otra, como "y", en la argumentación 1., la estructura argumentativa varía, hasta el punto de que el argumento deja de ser correcto, e incluso se hace contradictorio.

Fuiste en coche **y** andando.

No fuiste en coche

Luego fuiste andando

En cambio, podemos sustituir palabras fácticas, como "coche", por otras, como "patinete", o por cualquier otra expresión que mantenga sentido en la frase, y la estructura argumentativa se mantiene. De hecho, podemos sustituir toda la oración enunciativa por otra sin que la estructura argumentativa cambie; es así porque en la argumentación 1., toda la oración es una expresión fáctica.

Existen distintos tipos de argumentaciones. Esto quiere decir que existen distintas clases de estructuras argumentativas, cada una de ellas con un grupo distinto de palabras formales, que actúan estructurando de modo diferente el lenguaje natural.

Por ejemplo, la estructura argumentativa de los siguientes argumentos:

1.	2.
Todo sevillano **es** español	**Todo** gato **es** ave
Todo español **es** europeo	**Todo** ave **es** mamífero

Luego algún sevillano **es** europeo	**Luego algún** gato **es** mamífero

Es la misma, y podría representarse del siguiente modo:

Todo [nombre común: A] **es** [nombre común: B]

Todo [nombre común: B] **es** [nombre común: C]

Luego algún [nombre común: A] **es** [nombre común: C]

En esta estructura argumentativa las palabras formales ejercen su influencia sobre grupos, o conjuntos de seres, designados por nombres comunes.

Pero en el ejemplo anterior:

Fuiste en coche **o** andando.

No fuiste en coche

Luego fuiste andando

Las palabras formales ejercen su influencia sobre oraciones enunciativas completas. Es decir, las palabras formales {o, no, luego} actúan sobre oraciones y estructuran la argumentación entre oraciones. Pero las palabras formales {todo, es, algún} actúan sobre clases de objetos que se designan a través de nombres comunes. Su nivel sintáctico de actividad es distinto.

Pues bien, cada uno de esos tipos distintos de argumentaciones dará lugar a una clase distinta de lógica. En esas lógicas distintas se estudiará como los diferentes grupos de palabras formales son capaces de producir, por su presencia las distintas estructuras argumentativas que, al actuar sobre sus correspondientes expresiones fácticas, den lugar a argumentaciones correctas.

Por tanto, existirá una lógica de enunciados, que será aquella cuyas palabras formales estructuran enunciados; una lógica de predicados, cuando se refieran a los predicados que se adjudican a conjuntos de elementos; una lógica modal, que es aquella que mantiene como palabras formales: "imposible", "posible", "necesario" ...; una lógica deóntica, que presenta como palabras formales: "prohibido", "permitido", "obligado" ...; etc.

2.2 Construcción de un lenguaje para lógica de enunciados.

El lenguaje natural presenta, como ya se vio, diversos problemas para expresar con claridad las argumentaciones. Por ello, la lógica toma como estrategia general expresar en signos que ella misma define —simbolizar— la estructura argumentativa que presentan los argumentos del lenguaje natural.

En lo que sigue vamos a construir un lenguaje formal donde poder simbolizar las argumentaciones cuya estructura argumentativa incluye palabras formales que actúan sobre enunciados; es decir, vamos a construir un lenguaje para lógica de enunciados o proposiciones.

2.2.1 Simbolización de proposiciones.

Una proposición es lo que se afirma o niega en una oración enunciativa. Proposiciones y enunciados se distinguen por la propiedad de ser verdaderos o falsos.

No todas las oraciones del lenguaje natural dan proposiciones. Las oraciones interrogativas, exclamativas o imperativas no lo son, ya que no pueden ser ni verdaderas ni falsas.

Las proposiciones pueden ser atómicas o moleculares. Se entiende por **proposición atómica** aquella proposición afirmativa que no incluye otras proposiciones como partes suyas, mientras que se entiende por **proposición molecular** aquella que, o se compone de enunciados más simples incluidos en ella como partes suyas, o es la negación de una proposición, o ambas cosas a la vez.

> Por ejemplo; un enunciado como "La Luna es un cometa", puede unirse a "El Sol es una estrella" mediante la palabra "y", y tendríamos "La Luna es un cometa y el Sol es una estrella". Los dos primeros enunciados serían atómicos mientras que el enunciado compuesto se llamará molecular.

En lógica proposicional las proposiciones atómicas se **simbolizarán** por las letras minúsculas: "p", "q", "r", "s", "t" –que se denominan letras enunciativas- si tuviéramos necesidad de simbolizar más proposiciones atómicas se puede recurrir al uso de subíndices, comenzando por p_1, q_1, r_1, ... r_n, ... s_n, ... t_n

2.2.2 Simbolización de conectivas.

Las palabras que enlazan las proposiciones entre sí, o las niegan, son palabras formales que, para la lógica proposicional, tienen el nombre de **conectivas**[4].

> Las palabras y expresiones que **usualmente** hacen esa función en el lenguaje natural son varias: "y", "o", "no", "ni", "si…entonces", "sólo…si", "luego", "pero", "una de dos", "por lo tanto"…

En el lenguaje natural hay expresiones que de un modo habitual suelen identificar una conectiva lógica en concreto, pero no siempre es así.

> Por ejemplo: "Juan y Pedro van al cine" son dos proposiciones. Una es que Juan vaya al cine, y otra es que lo haga Pedro; ambas se unen por la conectiva "y". Pero en siete y cinco son doce, la palabra "y", no une proposiciones, luego no hace función de conectiva.
>
> Por otro lado, en: "De ninguna manera hay sol", "No ocurre que haga sol" o "No hace sol", tendríamos la misma proposición molecular —ya que en todas las situaciones reales tendrían los mismos valores de verdad— pero dicha de distinta forma; es decir, que las expresiones "De ninguna manera", "No ocurre", y "No", estarían haciendo el mismo papel conector. Por eso es importante distinguir lo que se dice del modo en que está dicho.

En el lenguaje natural muchas expresiones son ambiguas. Eso representa un problema a la hora de simbolizar en términos lógicos esas expresiones. Para poder hacerlo es

[4] También se las llama juntores y funtores.

preciso establecer, previamente, qué es lo que el usuario del lenguaje natural quiso decir al usar las palabras del modo en que lo hizo.

Por ejemplo, alguien puede preguntar qué bebió Luis en la comida; y alguien puede contestar que: "Luis bebió casera o vino". Ahora bien, puede ser que quien dice eso quiera decir que Luis bebió casera, vino, o ambas cosas mezcladas formando una única bebida; pero también puede ser que el hablante quisiera decir que bebió una de las dos posibilidades, casera o vino, pero en modo alguno ambas cosas juntas y a la vez.

Esas dos posibilidades, que son distintas, se producen porque la conectiva "o" tiene distintos significados. La importancia de esa diferencia está en que cada una de las posibilidades de entender su sentido daría lugar a una estructura argumentativa diferente.

Establecer qué es lo que el hablante quiso decir se realiza en lógica al **Fijar el sentido** de la expresión; es decir, estableciendo en qué condiciones las proposiciones que se estudian serían verdaderas y en cuales serían falsas.

Por ejemplo, en un enunciado atómico, como “El gato es negro” puede haber una ambigüedad respecto a si eso significa que un cierto animal gato es de color negro, o si un cierto instrumento mecánico para levantar pesos tiene ese color. La ambigüedad desaparece indicando qué hecho del mundo, en concreto, hace verdadera la proposición; es decir, si lo que hace verdadera la proposición es que en el mundo un cierto animal sea de color negro o si la hace verdadera que lo sea un cierto instrumento mecánico.

De igual modo en el caso de una proposición molecular fijar el sentido equivale a establecer qué hechos del mundo la hacen verdadera o falsa.

Y así, si digo: "el mes pasado fui al cine o al teatro", fijar su sentido es establecer en qué condiciones sería lo dicho verdadero y en cuales falso

Supongamos que:

ocurre en la realidad que:	**luego la oración molecular sería:**
1º. No fui al cine y no fui al teatro.	Falsa.
2º. No fui al cine y sí fui al teatro.	Verdadera.
3º. Sí fui al cine y no fui al teatro.	Verdadera.
4º. Sí fui al cine y sí fui al teatro.	Indeterminado

El problema está en el cuarto caso. Si lo que se quiso decir con “el mes pasado fui al cine o al teatro” es que sólo se fue a uno de los dos sitios pero no a ambos, como cuando alguien dice: "Hay extraterrestres o no los hay", la oración sería falsa. Pero si lo que se quiso decir es que iría a uno de los sitios, o incluso a ambos, como cuando se dice: "Para trabajar aquí hace falta saber inglés o francés", entonces mi oración sería verdadera.

Es decir, la oración: "El mes pasado fui al cine o al teatro" es anfibológica, y sólo deja de serlo cuando se establece qué situaciones reales la harían verdadera o falsa.

Una vez establecido eso se podrá simbolizar de un modo u otro dependiendo, justamente, de en qué condiciones es verdadero el enunciado y en cuales falso.

La conectiva denominada **conjuntor** se simboliza con el símbolo "$\wedge$". El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **conjunción**.

La estructura argumentativa que el conjuntor simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es verdadero sólo cuando ambos enunciados constituyentes lo son también.

> Y así por ejemplo, si "p" simboliza "El café está caliente" y "q" lo hace con "La leche está fría", entonces la proposición molecular "El café está caliente y la leche está fría" es una conjunción y su simbolización completa será:
>
> "$p \wedge q$"
>
> Las palabras del lenguaje natural que usualmente indican la presencia de un conjuntor son: "y", "pero", "sin embargo", "además", "también" ...

Cuando el enunciado molecular presenta sus enunciados componentes como alternativas nos encontramos frente a una **disyunción**. Dependiendo de que ambas alternativas puedan ser válidas a la vez, o no, tendremos una conectiva u otra.

La conectiva denominada **disyuntor exclusivo o contravaledor** se simboliza por el símbolo "$\veebar$". El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **disyunción exclusiva o contravalencia**.

La estructura argumentativa que el contravaledor simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es verdadero cuando alguno de los enunciados constituyentes es verdadero y el otro falso. Si ambos son falsos, o ambos verdaderos, el enunciado molecular es falso.

> Por ejemplo, si "p" simboliza "voy al cine", y "q" lo hace con "voy al teatro", entonces el enunciado molecular: "Una de dos o voy al cine o voy al teatro" es una contravalencia y se simbolizará:
>
> "$p \veebar q$"
>
> Es una contravalencia porque sólo sería verdadero si una de las dos alternativas se da; pero si no se da ninguna o se dan ambas a la vez sería falso.
>
> Las expresiones del lenguaje natural que suelen indicarla son: "Una de dos", "o", "o .... o ...". En ocasiones es el propio sentido de las expresiones la que lo indica, como en "Hoy es viernes o es jueves", ya que es imposible que pueda ser viernes y jueves a la vez.

La conectiva denominada **disyuntor inclusivo, o disyuntor** a secas se simbolizará por el símbolo "$\vee$". El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **disyunción inclusiva o** simplemente **disyunción**.

La estructura argumentativa que el disyuntor simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es falso sólo cuando los dos enunciados constituyentes son falsos a la vez.

> Por ejemplo, si "p" simboliza "Juan transportaba libros rojos", y "q" lo hace con "Juan transportaba libros azules", entonces el enunciado molecular: "Juan transportaba libros rojos o azules" es una disyunción, suponiendo que lo que queremos decir es que los libros transportados tenían uno de esos colores o que había libros de ambos colores, y se simbolizará:
>
> "$p \vee q$"

La palabra del lenguaje natural que suele indicar su presencia es "o".

En ocasiones es difícil interpretar qué es lo que el hablante quiere exactamente decir. Si encontramos un anuncio que indica que se acepta secretaria que sepa inglés o francés pensamos que si conoce ambos idiomas es apta para el trabajo, luego esa disyunción sería inclusiva. Pero a veces, como en "Juan cenó carne o pescado" no está claro qué se quiere decir en la disyunción. En caso de que la disyunción sea ambigua se simbolizará como inclusiva.

Para evitar ambigüedades simbolizaremos contravaledor sólo si aparece la expresión del lenguaje natural "una de dos", o si ambos enunciados alternativos no pueden ser ciertos a la vez: "hoy es lunes o viernes".

Cuando el enunciado molecular presenta sus enunciados componentes como condiciones uno del otro nos encontramos frente a una conectiva condicional. En un enunciado condicional se puede distinguir entre el antecedente y el consecuente.

La conectiva denominada **implicador o condicional** se simboliza por el símbolo "→". El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **implicación**.

La estructura argumentativa que el implicador simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es falso sólo cuando uno de los enunciados constituyentes —el que va antes de la flecha o antecedente— es verdadero y el otro —el que va después de la flecha o consecuente— falso. En otro caso el enunciado molecular es verdadero.

Y así si "p" simboliza "Me levanto temprano" y "q" simboliza "Tengo sueño durante el día", entonces la proposición molecular "Si me levanto temprano entonces tengo sueño durante el día" es una implicación y su simbolización completa es:

"p → q"

Las expresiones que usualmente representan la implicación son: "si...entonces", "si" "luego", "por lo tanto"...

El implicador es la conectiva cuya interpretación más discursión ha producido, ya que su formulación no corresponde con total exactitud a como utilizamos los enunciados condicionales en el lenguaje natural. Parece claro que si se indica que "si llueve las calles se mojan", y ocurre que llueve pero las calles no se mojan, entonces la implicación es falsa. Pero ¿qué ocurre cuando no llueve? ¿Por qué decir que la implicación es verdadera se mojen o no?

Por ejemplo, supongamos que se dice que "si Napoleón está vivo yo soy Julio Cesar". Tal y como hemos definido la implicación esa proposición molecular es verdadera, pero ¿por qué? Sin entrar en cuestiones técnicas podría entenderse que el hablante quiere indicar que, como lo primero es falso —ya que Napoleón no está vivo con toda seguridad— entonces, aunque lo segundo sea también falso, no se dice falsedad, puesto que Napoleón no está vivo.

La segunda conectiva condicional es denominada **equivaledor** o **bicondicional**, y se simboliza por el símbolo "↔". El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **equivalencia** o **enunciado bicondicional**.

La estructura argumentativa que el equivaledor simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es verdadero cuando ambos enunciados constituyentes son verdaderos o ambos falsos. En otro caso el enunciado molecular es falso.

Y así si “p” simboliza “Hoy es jueves” y “q” simboliza “Mañana es viernes”, entonces la proposición molecular “Sólo si hoy es jueves entonces mañana es viernes” es una equivalencia y su simbolización completa es:

“p ↔ q”

Las expresiones del lenguaje natural que suelen indicarla son “si y solo si” “solo si”, “sólo si ... entonces”

Una equivalencia es una doble implicación. Es decir, se da cuando ocurre que “p → q” y también ocurre que “q → p”

Y por último, está la conectiva denominada **negador** que se simboliza con el símbolo “¬”. El enunciado molecular resultante de su aplicación se denomina **negación**.

La estructura argumentativa que el negador simboliza es aquella en la que el enunciado molecular es verdadero cuando el enunciado atómico es falso, y es falso cuando el enunciado atómico es verdadero. El negador es la única conectiva que puede actuar sobre un enunciado atómico o uno molecular[5].

Y así si “p” simboliza “Hoy hay clase”, entonces la proposición molecular “Hoy no hay clase” se simbolizará:

“¬ p”.

Las expresiones del lenguaje natural que suelen indicarla son: “no” “ni”...

Una tabla resumen sería la siguiente:

Conectiva	Símbolo lógico	Enunciado molecular	Expresión natural	Enunciado simbolizado
Conjuntor	∧	Conjunción	y	p ∧ q
Contravaledor	⊻	Contravalencia	una de dos	p ⊻ q
Disyuntor	∨	Disyunción	o	p ∨ q
Implicador	→	Implicación	si ... entonces	p → q
Equivaledor	↔	Equivalencia	si y sólo si	p ↔ q
Negador	¬	Negación	no	¬ p

2.2.3 Reglas sobre el uso de paréntesis

En todo enunciado molecular siempre hay una **conectiva principal**, es decir una conectiva que hace que el enunciado molecular entero sea una disyunción, una implicación o el que sea; y luego podrá haber, o no, otras conectivas secundarias.

[5] Es una conectiva monádica, mientras que las demás son diádicas.

A la hora de simbolizar, si no distribuimos y separamos el alcance de las conectivas con los paréntesis, nos podemos encontrar con simbolizaciones ambiguas.

Por ejemplo, un enunciado molecular, como:

1. "Si Juan come y Luis bebe, entonces Antonio se enfada", se simbolizaría:

p: Juan come   q: Luis bebe   r: Antonio se enfada   **$p \wedge q \rightarrow r$**

Pero esa expresión, tal y como está escrita, es ambigua, porque puede representar también el enunciado molecular:

2. "Juan come y, si Luis bebe Antonio se enfada".

Para evitar ambigüedades en la simbolización se recurre al uso de paréntesis. El paréntesis es un signo sintáctico que sirve para distinguir los enunciados moleculares formados por el alcance de los conectores.

La ***regla primera*** de los paréntesis indicaría que los paréntesis incluyen en su interior a los enunciados afectados por la conectiva que se encuentra en medio de ellos.

Y entonces, y volviendo al ejemplo anterior, tendríamos que el enunciado 1 y el 2, manteniendo la asignación de las letras a las proposiciones, se simbolizarían:

1. $((p \wedge q) \rightarrow r)$. El enunciado molecular sería una implicación —conectiva principal: implicador— entre una conjunción y un enunciado atómico.
2. $(p \wedge (q \rightarrow r))$. El enunciado molecular sería una conjunción —conectiva principal: conjuntor— entre un enunciado atómico y una implicación.

La ***segunda regla*** de los paréntesis indica que si fuera de los últimos paréntesis no existe ninguna conectiva podemos quitarlos. Eso nos ofrece dos ventajas. Por un lado reducimos la confusión que puede darse cuando se involucran muchos paréntesis, y por otro lado nos permite identificar con claridad cuál sea la conectiva principal, que ahora podemos distinguir fácilmente por ser la que queda fuera del alcance de todos los paréntesis.

Y así, las simbolizaciones anteriores:

Pasan de escribirse:	***A escribirse***
$((p \wedge q) \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
$(p \wedge (q \rightarrow r))$	$p \wedge (q \rightarrow r)$

En el caso de que fuera de los paréntesis aún hubiera una conectiva, los paréntesis no deben quitarse. Por ejemplo, si tenemos: "$\neg (p \wedge (q \rightarrow r))$" no podemos pasar a poner "$\neg p \wedge (q \rightarrow r)$", ya que se trata de fórmulas distintas. En la primera la conectiva principal es un negador, en la otra es un conjuntor.

Las dos siguientes reglas de los paréntesis se refieren al uso con la conectiva negador, y tienen como fin restringir su uso cuando éste no sea necesario.

La ***tercera regla*** de los paréntesis dice que si la conectiva negador {¬}, aunque esté repetida, no aparece seguida de paréntesis, afectará tan sólo a la letra enunciativa, o enunciado molecular, que le sigue inmediatamente:

> Es decir, por la regla número uno tendríamos que poner "¬ (p)" cada vez que apareciera una proposición negada, pero ahora, por la regla tercera podemos poner directamente "¬ p". Y también, en vez de poner "¬ (¬(p))" podemos poner directamente "¬ ¬ p".

La ***cuarta regla*** de los paréntesis dice que siempre que en el exterior de unos paréntesis aparezcan la conectiva negador y otra, la conectiva principal no será el negador.

> Y así, si nos encontramos con: "¬ p → (q ∨ r)" sabremos que la conectiva principal es el implicador. Para que lo fuera el negador tendría que poner: "¬ (p → (q ∨ r))".

3 Tablas de verdad

Una vez simbolizada la expresión del lenguaje natural nos interesa conocer si esa fórmula lógica es, o no, correcta.

Las **tabla de verdad** constituyen un método mecánico -podría ser efectuado por una máquina- para decidir si una fórmula bien formada en lógica proposicional es o no correcta. Consiste en un cuadro o diagrama que presenta los posibles valores de verdad de un enunciado más o menos complejo, determinado por cierta conectiva, y en correspondencia con los valores de verdad posibles de sus enunciados componentes.

En toda tabla de verdad hay una o varias columnas **de referencia** que son aquellas donde se registran todos los casos posibles de valores de verdad de los enunciados componentes, y hay una única columna de **resultado** que es donde se anotan los valores de verdad del enunciado total al que se refiere la tabla y que por convenio se distingue de las columnas de referencia en que está doblemente barrada.

Y así, siendo las letras "A, B, C, D y E" símbolos del metalenguaje de lógica proposicional que representan cualquier enunciado, atómico o molecular, de esta lógica. Y asignándoles a las fórmulas de la lógica proposicional los distintos valores de verdad representados con las letras V y F[6], también símbolos del metalenguaje, se representará gráficamente esa información en las distintas tablas de verdad para cada conectiva.

Como la **conjunción** representaba una estructura argumentativa tal que el enunciado molecular era verdadero sólo cuando ambos enunciados constituyentes lo eran también, entonces:

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

> Es importante darse cuenta que A y B sirven para representar cualquier enunciado, molecular o atómico, de lógica de enunciados. Por eso, la tabla, no sólo dice que condiciones de verdad tiene un enunciado como "p ∧ q", sino que sirve también para cualquier enunciado que tenga como conectiva principal a la conjunción.
>
> Por ejemplo,"¬(p ∨ ¬ q) ∧ (r → ¬ p)". En este caso A representaría "¬ (p ∨ ¬ q) " y B "(r → ¬ p)". El enunciado molecular "¬(p ∨ ¬ q) ∧ (r→ ¬ p)", sólo será verdadero si, como dice la tabla, A= ¬(p ∨ ¬ q) lo es y B = (r → ¬p) también lo es, en otro caso sería falso.

La **contravalencia** se define como aquel enunciado molecular que es falso cuando ambos enunciados componentes son verdaderos o ambos falsos, y que es verdadero en otro caso. Su tabla es:

A	B	A ⊻ B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6 Tanto A, B, como V, F, son expresiones del metalenguaje de lógica de enunciados, ya que se usan para hablar sobre expresiones de lógica de enunciados.

La **disyunción o disyunción inclusiva** se definía como aquel enunciado molecular que sólo es falso cuando los dos enunciados que lo componen lo son, y que en otro caso es verdadero. Su tabla de verdad es:

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En un enunciado condicional el enunciado que es condición del otro se llama *antecedente*, y al que está condicionado por el anterior se le denomina *consecuente*.

La **implicación** se define como el enunciado molecular que únicamente es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, y es verdadero en cualquier otro caso. Su tabla es:

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Respecto a la **equivalencia** ésta se define como el enunciado molecular que es verdadero cuando ambos enunciados componentes sean verdaderos o ambos falsos; en otro caso será falso. Y su tabla de verdad es la siguiente:

A	B	A ↔ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Por último, la **negación**, se define como el enunciado molecular que es verdadero cuando el enunciado negado es falso, y que es falso cuando el enunciado negado es verdadero. Su tabla de verdad es:

A	¬ A
V	F
F	V

Una tabla resumen sería la siguiente:

A	B	A ∧ B	A ⊻ B	A ∨ B	A → B	A ↔ B	¬ A
V	V	V	F	V	V	V	
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	

3.1 Resolución de argumentos a través de tablas de verdad.

Para establecer el valor de verdad de un enunciado molecular se recurre al **principio de extensionalidad,** que dice que tal valor depende del valor de verdad de los enunciados que lo forman en relación con el tipo de conectiva que los une, y eso es justamente lo que queda representado en una tabla de verdad.

En una tabla de verdad deben estar representadas todas las posibilidades de valores de verdad de los enunciados componentes. Estas posibilidades crecen a medida que haya más letras enunciativas distintas.

> Por ejemplo, supongamos la siguiente fórmula lógica: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.
>
> En ella hay cuatro letras enunciativas, pero sólo dos —p y q— distintas.

Para saber el número de filas de valores de verdad que tendrá nuestra tabla lo calcularemos con la siguiente fórmula: 2^n, donde "n" es el número de letras enunciativas distintas.

> En el caso del ejemplo n=2, luego 2^2 será el número de filas; es decir 4. Sin embargo, si la fórmula hubiera sido: $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow p)$, hubiéramos tenido tres letras enunciativas distintas, y por tanto n=3, luego saldrían 2^3 filas, lo que haría un total de 8.

Después se comienza asignando los valores de verdad a las distintas letras enunciativas que aparezcan en la fórmula a comprobar, comenzando por la primera letra enunciativa que aparezca.

Para disponer las distintas filas, sin repetir las asignaciones de valores de verdad para los enunciados atómicos componentes, es interesante hacer lo siguiente: una vez que ya sabemos el número de filas de valores de verdad total de la tabla pondremos, para la primera letra enunciativa, la mitad de valores de su columna V y la otra mitad F. Para la siguiente columna se obrará igual, pero haciéndolo sobre la mitad de la mitad; es decir, la mitad de la mitad V y la mitad de la mitad F, hasta completar la columna. Para cada nueva columna se obrará recursivamente igual, añadiendo una “mitad de la mitad”.

Por ejemplo, si fueran 3 las letras enunciativas distintas tendríamos que el número de filas sería 8, luego

p	q	r
V		
V		
V		
V		
F		
F		
F		
F		

Para la siguiente letra enunciativa distinta la mitad de la mitad corresponderá a V y la otra mitad de la mitad corresponderá a F, repitiendo el proceso hasta completar el número de filas.

p	q	r
V	V	
V	V	
V	F	
V	F	
F	V	
F	V	
F	F	
F	F	

Y así se seguirá con las demás letras enunciativas distintas; se hará lo mismo, pero añadiendo una mitad más.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Después pasaremos a poner los valores de verdad a los enunciados moleculares más simples de los que las letras enunciativas forman parte, y así irá subiéndose en complejidad hasta llegar a la conectiva principal.

Por ejemplo, de la fórmula: $(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow p)$, su tabla sería:

p	q	r	$p \wedge q$	$r \leftrightarrow p$	$(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V

Otro ejemplo; la tabla de la fórmula (p → q) → (¬ p ∨ q) sería:

p	q	(p → q)	¬p	(¬p ∨ q)	(p → q) → (¬p ∨ q)
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Por último, la tabla de la fórmula ¬ ((p ↔ p) → (¬ p ⊻ p)) sería:

p	p ↔ q	¬ p	¬ p ⊻ p	(p ↔ p) → (¬ p ∨ q)	¬ ((p ↔ p) → (¬ p ⊻ p))
V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F

Cuando en la columna de resultados —la doblemente barrada— tengamos todos los valores "V" llamaremos a la fórmula o argumento que los da **Tautología** y entenderemos que el argumento es correcto.

Cuando la columna de resultados tenga algún o algunos, pero no todos, "F" diremos que la fórmula es **Contingente** y entenderemos que el argumento es incorrecto.

Y por último, cuando todos los resultados de la columna sean "F" diremos que el argumento es una **Contradicción** y será también incorrecto.

4 Noción de Cálculo.

Los lenguajes constan de una sintaxis y de una semántica.

La parte sintáctica de un lenguaje es la que se encarga de señalar cuáles son los signos, o símbolos gráficos, permitidos, y de establecer las reglas sobre qué agrupaciones de símbolos serán consideradas como expresiones válidas.

> Por ejemplo, la sintaxis del español conlleva establecer como signos válidos las 28 letras de nuestro alfabeto, además de ciertos signos gramaticales –punto (.), coma (,), acento (´) ...- otros idiomas, como el chino, el cirílico o el árabe, estipulan una serie de signos distintos como signos válidos. Pero además de establecer qué signos son los signos válidos del lenguaje, la sintaxis establece qué agrupaciones de signos —palabras, expresiones, oraciones— se considerarán expresiones bien formadas del lenguaje. El castellano, por ejemplo, establece que todos los verbos posibles acaben en "ar", "er" o "ir", establece desinencias para construir las formas verbales en los verbos regulares, señala ciertas construcciones gramaticales como incorrectas "él me dijo de que no iría", da reglas para aplicar los signos de puntuación y acentuación... Es decir; la sintaxis regula a través de reglas qué agrupaciones de símbolos de la lenguaje están permitidas o no.

La parte semántica de los lenguajes es aquella que asigna significado a expresiones que han sido bien formadas según las reglas sintácticas del propio lenguaje.

> Por ejemplo, cuando se asigna un significado a la expresión "gato", tal como: mamífero doméstico, felino, que caza ratones.

Pues bien, un cálculo es una construcción artificial que incluye la parte sintáctica de un lenguaje, aunque no sólo eso, y excluye la parte semántica.

Lo elementos constitutivos de un cálculo son tres. Los dos primeros son los que constituyen la parte sintáctica pura de un lenguaje. Y son; un conjunto de signos denominado **vocabulario primitivo**. Y unas **reglas de formación** con las que realizar agrupaciones de símbolos denominadas expresiones o fórmulas bien formadas (fbf) del cálculo.

Al excluir la parte semántica de los lenguajes, los signos y expresiones de los cálculos no tienen ningún significado. Se limitan a ser manchas de tinta de una clase determinada, o de otra; nada más. Que los signos del cálculo no tengan significado es esencial a la idea de cálculo.

El tercer elemento que añade el cálculo es otro conjunto de reglas, llamadas, **reglas de trasformación o inferencia**, por cuyo uso se permite pasar de unas expresiones dadas a otras nuevas expresiones. Las reglas de inferencia es lo que distinguen a un cálculo de la mera sintaxis de un lenguaje, y es lo que le permite realizar la función para la que ha sido construido: calcular.

Y así, **calcular** debe entenderse como pasar o discurrir, utilizando las reglas de transformación, desde una o varias expresiones del cálculo a otra nueva expresión del

cálculo que no se encuentra expresadas en el conjunto de partida.

Todo cálculo funciona como un sistema deductivo, ya que desde él podemos deducir nuevas fórmulas a través de un proceso denominado demostración o prueba.

Una **demostración o prueba** es una secuencia no vacía y finita de fórmulas tales que cada una de ellas ha sido obtenida por la aplicación de las reglas de transformación sobre fórmulas de líneas anteriores

> Similarmente calcular en matemáticas puede entenderse como el paso de una serie de expresiones dadas:
>
> Si:
>
> 1ª) 2 + 7 = X
> 2ª) X / 3 = Y
> 3ª) Y · 7 = Z
>
> A una nueva expresión
>
> 4ª) Z = 40
>
> Es decir, calcular el valor de Z es transcurrir de las tres primeras expresiones a la cuarta según unas reglas de transformación que definen la suma la división y la multiplicación en la aritmética.

La utilidad del cálculo aparece cuando se interpreta. Una **interpretación** es la asignación de un significado al vocabulario y fórmulas bien formadas que puedan establecerse en él.

Al hacerse eso se pasa de tener un cálculo a tener un lenguaje, ya que añadimos a la sintaxis la semántica. El lenguaje obtenido no es un lenguaje natural, como el castellano, sino un lenguaje formalizado, un lenguaje con estructura de cálculo.

Los cálculos, aunque al construirlos no significan nada, se realizan en vistas a que, al darles una interpretación, puedan simbolizar el conjunto de fenómenos que nos interesa formalizar.

> Y así, por ejemplo, existen cálculos que formalizan la mecánica cuántica, distintas partes de la matemática, etc. De hecho, una gran cantidad de epistemólogos consideran la estructura formal como aquella que idealmente debe adoptar una teoría científica

4.1 Clases de cálculo

Existen dos clases distintas de cálculos.

En los cálculos denominados **cálculos de deducción natural** (CDN) a las fórmulas de las que se parte para construir la demostración se las denomina **premisas**, y a las fórmulas a la que se llega **conclusión**. Las premisas desde las que se inicia el cálculo se caracterizan por variar y ser ofrecidas arbitrariamente para cada ocasión o problema de cálculo en concreto.

Así por ejemplo se indica la fórmula, o fórmulas de partida, y se inquiere sobre cómo derivar otra fórmula de llegada. Esas premisas que se dan para iniciar el cálculo no forman parte del sistema deductivo, sino que pueden variar para cada nuevo problema de deducción.

Sin embargo hay otros sistemas deductivos, denominados **sistemas axiomáticos**, en los que las proposiciones iniciales de las que se parte se denominan **axiomas**, y se distinguen de las premisa por que los axiomas no varían, tienen validez en cualquier momento y para cualquier demostración que pueda darse en ese cálculo axiomático del que forman parte de modo constitutivo. En el caso de los sistemas axiomáticos, a la fórmula final de la demostración se la denomina **teorema**.

Un axioma no es una proposición verdadera, ya que en el cálculo nada significa y nada puede ser verdadero o falso, son más bien fórmulas bien formadas universalmente válidas para el cálculo, y por cuya presencia se ayuda a acotar el campo sobre el que el cálculo tendrá posteriormente aplicación.

Por ejemplo, a la hora de construir un sistema axiomático que tenga puesto su interés en ser interpretable por la geometría se puede establecer como axioma que por un punto exterior a una recta dada en un plano sólo se puede trazar una paralela, entendiendo por rectas paralelas aquellas que no tienen punto de intersección en el plano. Ese axioma será algo que siempre tendrá validez en el sistema axiomático, y por tanto se podrá utilizar para realizar deducciones; por ejemplo, podría deducirse que, dada la validez del axioma de las paralelas entonces, como por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela, si (a,b) es punto de la recta T, y la recta R es paralela a T, entonces el punto (a,b) no pertenece a la recta T. Sobre esa afirmación cabe una demostración rigurosa que partiría de los axiomas de la geometría y deduciría, a través de una serie de reglas de trasformación, la fórmula antedicha.

4.2 Construcción de un cálculo de deducción natural para enunciados

Un cálculo requiere tres elementos: vocabulario primitivo, reglas de formación y reglas de trasformación. Por tanto, construir un cálculo de deducción natural consiste en dar valor a esos tres elementos.

El primero es el **vocabulario primitivo**, que, a su vez, está formado por tres clases de elementos.

Para representarlos se hará uso de la coma (,) sin que este signo sea parte del vocabulario primitivo del cálculo; más bien lo sería del metalenguaje.

El primero de ellos son las letras enunciativas; y sus símbolos son:

$p, p_1, p_2, p_3, ..., p_n$
$q, q_1, q_2, q_3, ..., q_n$
$r, r_1, r_2, r_3, ..., r_n$
$s, s_1, s_2, s_3, ..., s_n$
$t, t_1, t_2, t_3, ..., t_n$

Después las conectivas o signos operadores:

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \not\vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

Y por último los signos ortográficos:

) (

El segundo elemento constitutivo del cálculo son las **reglas de formación**, las cuales dan lugar al conjunto de fórmulas bien formadas {fbf} del cálculo.

Para representarlas se hará uso de los símbolos "A", "B", "⇒", "∈", "&" y "fbf". Esos símbolos pertenecerían al metalenguaje del cálculo. "A" y "B" representan cualquier agrupación de símbolos del cálculo, "⇒" representa un "si... entonces", es decir un implicador pero en el Metalenguaje, "∈" significa "pertenencia", "&" es la conjunción, pero en el metalenguaje y "{fbf}" representa el conjunto de las fórmulas bien formadas del cálculo. En general los diseñadores de cálculos establecen con el mismo rigor lógico los símbolos con los que hablarán de su cálculo, es decir, los signos del metalenguaje. La razón estriba en que, en ocasiones, quieren realizar afirmaciones y demostraciones que involucran a todo el cálculo; para eso hace falta operar con rigor, es decir, establecer de una manera formal el modo de hablar del cálculo.

1. Si A es letra enunciativa ⇒ A ∈ {fbf}
2. Si A ∈ {fbf} ⇒ ¬ (A) ∈ {fbf}
3. Si A & B ∈ {fbf} ⇒ (A ∧ B) ∈ {fbf}
4. Si A & B ∈ {fbf} ⇒ (A ∨ B) ∈ {fbf}
5. Si A & B ∈ {fbf} ⇒ (A ⊻ B) ∈ {fbf}
6. Si A & B ∈ {fbf} ⇒ (A → B) ∈ {fbf}
7. Si A & B ∈ {fbf} ⇒ (A ↔ B) ∈ {fbf}

Además de estas estableceremos como reglas sintácticas del uso de paréntesis las que se adoptaron como válidas al simbolizar los argumentos del lenguaje natural.

1. Si (¬ A) ∈ {fbf} ⇒ ¬ A ∈ {fbf}
2. Si (A ∧ B) ∈ {fbf} ⇒ A ∧ B ∈ {fbf}
3. Si (A ∨ B) ∈ {fbf} ⇒ A ∨ B ∈ {fbf}
4. Si (A ⊻ B) ∈ {fbf} ⇒ A ⊻ B ∈ {fbf}
5. Si (A → B) ∈ {fbf} ⇒ A → B ∈ {fbf}
6. Si (A ↔ B) ∈ {fbf} ⇒ A ↔ B ∈ {fbf}

Y por último estableceremos las **reglas de transformación**, que nos dicen cómo podemos derivar unas líneas de otras.

Estableceremos varias reglas, aunque muchas no son necesarias, por cada conectiva para facilitar la agilidad del cálculo.

La línea simple indica que si tenemos en el cálculo lo puesto por la parte superior de la línea, entonces podemos poner lo puesto por la parte inferior. Si la línea está doblemente barrada entonces también podemos poner lo superior si en el cálculo aparece lo inferior

Conectiva **negador**.

IN o Reducción al absurdo.	EN o Doble Negación.
La regla viene a decir que si suponemos una fbf A y llegamos a una contradicción, entonces podemos afirmar la negación de la fórmula supuesta [A ... ... B ∧ ¬ B] ――――― ¬ A	La regla viene a decir que si tenemos en el cálculo una fórmula doblemente negada podemos pasar a afirmarla sin ninguna negación, y viceversa. ¬ ¬ A ═════ A

Conectiva conjuntor.

IC. o Producto	EC. o Pedro Hispano
La regla viene a decir que si tenemos dos fbf separadas en el cálculo podemos unirlas a través del operador. A B ――――― A ∧ B	En realidad son dos reglas, EC1 y EC2. Las reglas vienen a decir que si tenemos dos fbf unidas por el signo operador, podemos separar uno de los elementos componentes de la fbf. EC1 A ∧ B ――――― A EC2 A ∧ B ――――― B

Conectiva **disyuntor**.

ID o Adicción	ED o Casos
Son dos reglas, ID1 y ID2. Las reglas vienen a decir que si tenemos una fbf podemos unirla a cualquier otra, haya sido derivada o no en el cálculo, a través del operador. ID1 A ――――― B ∨ A ID2 A ――――― A ∨ B	La regla viene a decir que si tenemos una disyunción y suponiendo cada uno de los miembros llegamos a la misma derivación, entonces podemos afirmar lo derivado A ∨ B [A ... C] [B ... C] ――――― C

SD o Silogismo Disyuntivo	De Morgan
Son dos reglas, SD1 y SD2. Dicen que si tenemos una disyunción y la negación de uno de sus miembros, entonces podemos afirmar el otro. SD1 A ∨ B ¬B ――――― A SD2 A ∨ B ¬A ――――― B	Son cuatro reglas para pasar de una conjunción a una disyunción, y viceversa. Para ello se niega la fórmula entera, a cada componente, y se cambia el operador. DMC A ∧ B ═════ ¬(¬A∨¬B) DMNC ¬(A ∧ B) ═════ ¬A ∨ ¬ B DMD A ∨ B ═════ ¬(¬A∧¬B) DMND ¬(A ∨ B) ═════ ¬ A ∧ ¬ B

Conectiva **implicador**

I I. o Teorema de Deducción (TD)	EI o Modus Ponens (MP)
La regla viene a decir que si suponemos una formula y bajo ese supuesto derivamos otra, entonces la primera implica la segunda. $$\frac{\begin{array}{\|l} A \\ \ldots \\ \ldots \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$	Esta regla indica que si se dispone de una implicación, y de su antecedente en el cálculo, podemos derivar el consecuente. $$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

Modus Tollens (MT)	Contraposición (Cp)	Silogismo (S)
Esta regla indica que si se dispone de una implicación, y de la negación de su consecuente, podemos derivar la negación del antecedente. $$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$	La regla viene a decir que si tenemos una implicación podemos afirmar una nueva implicación en la que el antecedente cambie su lugar con el consecuente, pero negando ambos. $$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \hline\hline \neg B \rightarrow \neg A \end{array}$$	Dadas dos implicaciones en la que el consecuente de la primera es el mismo que el antecedente de la segunda, podemos implicar el antecedente de la primera con el consecuente de la segunda $$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{array}}{A \rightarrow C}$$

Conectiva **contravaledor**

Definición de la contravalencia (DDC)	Negación de la contravalencia
Define la contravalencia como una disyunción en la que ambos términos no pueden darse a la vez. $$\begin{array}{c} A \veebar B \\ \hline\hline (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) \end{array}$$	Define la equivalencia en términos de una negación de la contravalencia. $$\begin{array}{c} \neg (A \veebar B) \\ \hline\hline A \leftrightarrow B \end{array}$$

Conectiva **Equivaledor**

Definición de la equivalencia (DDE)	Negación de la equivalencia
Define la equivalencia en términos de la implicación. $$\begin{array}{c} A \leftrightarrow B \\ \hline\hline (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \end{array}$$	Define la equivalencia en términos de una negación de la contravalencia. $$\begin{array}{c} \neg (A \leftrightarrow B) \\ \hline\hline A \veebar B \end{array}$$

5 Representación de un Cálculo de Deducción Natural (CDN).

En un CDN se nos ofrecen unas premisas, en líneas numeradas, como punto de partida, y una conclusión a la que debemos llegar aplicando las reglas de transformación sobre las premisas.

También puede ocurrir que el número de premisas sea 0, en ese caso de lo que se trataría es de demostrar que la fórmula que hay que concluir es una tautología, y se realizaría del mismo modo que con premisas, aplicando las reglas de trasformación dadas.

Las premisas llevan delante un guion, mientras que la conclusión a la que hay que llegar lleva delante, para distinguirla, el signo de consecuencia sintáctica { ├ }

Por ejemplo, lo siguiente sería el planteamiento de un CDN.

├ ¬q

— 1. p → (q → ¬p)

— 2. p

En el que se pide que se llegue a concluir ¬q a partir de las dos premisas que se ofrecen: "p → (q → ¬p)" y "p"

Cada nueva fórmula obtenida, por la aplicación de las reglas de transformación sobre las premisas, va en una nueva línea, numerada con el número siguiente —denominada línea de derivación, o línea derivada— y que tiene a la derecha la notación de la regla de trasformación aplicada, y de las premisas, o líneas de derivación, sobre las que se ha aplicado la regla.

Siguiendo el ejemplo anterior tendríamos.

├ ¬q

— 1. p → (q → ¬p)

— 2. p

3. q → ¬p MP 1,2

La línea 3 se obtiene aplicando la regla de transformación denominada Modus Ponens sobre la línea 1 y 2; como la línea 3 es una línea derivada no lleva guion a la izquierda.

El cálculo podría completarse del siguiente modo.

4. ¬¬ p → ¬ q CP 3

5. ¬¬ p DN 2

6. ¬ q MP 4,5

El cálculo termina cuando conseguimos que aparezca en la última línea derivada lo que queremos concluir.

En un cálculo podemos también operar en partes de fórmulas a partir de una subregla denominada **Intercambio**. Para aplicar intercambio tenemos que utilizar una regla de trasformación que éste doblemente barrada, e indicar sobre qué parte de la fórmula la aplicamos.

Por ejemplo, podríamos continuar el anterior cálculo, desde la línea 4, así:

5. p → ¬ q   Intercambio[1] según DN en 4

6. ¬ q   MP 5,2

El superíndice ([1]) indica que la regla de Intercambio se aplica en el primer miembro de la fórmula

Por último nos podemos encontrar con la posibilidad de aplicar **supuestos**.

Los supuestos son líneas de derivación que no afirmamos, sólo suponemos, pero nos pueden servir para afirmar algo cuando se cancelan.

La manera de abrir y cerrar el supuesto es con un guion, como las premisas, sólo que aquí, mientras no cancelemos el supuesto abierto, se sigue con una línea vertical. Al abrir un supuesto no se anotación nada a la derecha. Por otro lado, nada que derivemos bajo el supuesto puede utilizarse fuera del supuesto, sólo lo cancelado y siempre que podamos cancelarlo con una regla.

Y así, podríamos resolver el mismo CDN del siguiente modo

├ ¬q

— 1. p → (q → ¬p)

— 2. p

3. q → ¬p   MP 1,2

┌─ 4. q
│ 5. ¬p   MP 3,4
└─ 6. p ∧ ¬p   IC 2, 5
7. ¬q   Reducción al Absurdo 4—6

6 Esquema del tema 7.

1. Los problemas lógicos del lenguaje natural.
    1.1. Caracterización del lenguaje natural:
    1.2. Ambigüedad: polisemia y homonimia.
        1.2.1. Definición de ambigüedad: .
        1.2.2. Tipos de expresiones ambiguas:
            1.2.2.1. Equivocidad: .
            1.2.2.2. Anfibología: .
        1.2.3. Consecuencia de la ambigüedad: .
    1.3. Sinonimia
        1.3.1. Condiciones de la sinonimia:
        1.3.2. Problema para conseguir la sinonimia: .
    1.4. Autorreferencialidad.
        1.4.1. Sintaxis del lenguaje natural: .
        1.4.2. Consecuencia de la inexistencia de sintaxis completa para el lenguaje natural.: .
        1.4.3. Consecuencia de la autorreferencialidad: .
            1.4.3.1. Formulación de la paradoja del mentiroso y explicación: “.
            1.4.3.2. Explicación de la existencia de la paradoja: .
            1.4.3.3. Forma de resolver la paradoja: .
        1.4.4. Lenguaje objeto y metalenguaje.
            1.4.4.1. Definición de lenguaje objeto: .
            1.4.4.2. Definición de metalenguaje: .
            1.4.4.3. Jerarquización de Tarski: .
            1.4.4.4. Condición que evita la paradoja: .
            1.4.4.5. Consecuencias lógicas de no diferenciar lenguaje objeto y metalenguajes: .
    1.5. Discursos sin referentes.
        1.5.1. Característica del lenguaje natural: .
        1.5.2. Desventaja del lenguaje natural: .
    1.6. La necesidad de un lenguaje formal.
        1.6.1. El lenguaje formal:
            1.6.1.3. Utilidad del lenguaje formal: .
            1.6.1.4. Caracterización del lenguaje formal: .
            1.6.1.5. Manera de conseguir mostrar la forma lógica: .
            1.6.1.6. Relación entre estructura argumentativa sintaxis y semántica: .
            1.6.1.7. Noción de cálculo: atiende únicamente al nivel sintáctico del lenguaje formal.
                1.6.1.7.1. Utilidad de la noción de cálculo: .
2. Lenguaje formal.
    2.1. Argumentaciones y lógicas.
        2.1.1. Estructura argumentativa: .
            2.1.1.1. Palabras formales: .
            2.1.1.2. Palabras: fácticas: .
        2.1.2. Relación entre tipos de argumentaciones y palabras formales: .
        2.1.3. Lógicas distintas: .
    2.2. Construcción de un lenguaje para lógica de enunciados.
        2.2.1. Estrategia general: .
        2.2.2. Tarea: .
        2.2.3. Simbolización de proposiciones.
            2.2.3.1. Definición de proposición: .
                2.2.3.1.1. Atómica: .
                2.2.3.1.2. Molecular: .
            2.2.3.2. Definición de conectiva: .
                2.2.3.2.1. Identificación de conectivas: .
            2.2.3.3. Procedimiento para evitar la ambigüedad del lenguaje natural: .

2.2.3.3.1. Fijar el sentido: .
2.2.3.3.2. Necesidad de interpretar el sentido: .
2.2.3.4. Simbolización de enunciados: .
2.2.4. Simbolización de conectivas.
2.2.4.1. Definición de conectiva: .
2.2.4.2. Palabras del lenguaje natural que simbolizan: .
2.2.4.3. Problema para la simbolización: .
2.2.4.3.1. Solución: .
2.2.4.4. Conectivas.
2.2.4.4.1. Conjuntor: .
2.2.4.4.2. Contravaledor: .
2.2.4.4.3. Disyuntor: .
2.2.4.4.4. Implicador: .
2.2.4.4.5. Equivaledor: .
2.2.4.4.6. Negador: .
2.2.5. Reglas sobre el uso de paréntesis.
2.2.5.1. Conectiva principal: .
2.2.5.2. Función de los paréntesis: .
2.2.5.3. Reglas.
2.2.5.3.1. Primera: .
2.2.5.3.2. Segunda: .
2.2.5.3.3. Tercera: .
2.2.5.3.4. Cuarta: .
3. Tablas de verdad.
3.1. Característica y función: .
3.2. Procedimiento: .
3.3. Partes: .
3.4. Resolución de argumentos a través de las tablas de verdad.
3.4.1. Principio de extensionalidad: .
3.4.2. Construcción de la tabla. Filas: 2^n donde n es el número de letras enunciativas distintas.
3.4.3. Columna de resultados.
3.4.3.1. Tautología: todos los resultados V: fórmula correcta.
3.4.3.2. Contingencia: uno o más V o F pero no todos: fórmula incorrecta.
3.4.3.3. Contradicción: todos los resultados F: fórmula incorrecta.
4. Noción de Cálculo.
4.1. La parte sintáctica de un lenguaje: .
4.2. La parte semántica de un lenguaje: .
4.3. Caracterización de un cálculo: .
4.4. Elementos constitutivos de un cálculo.
4.4.1. Parte sintáctica: .
4.4.1.1. Vocabulario primitivo: .
4.4.1.2. Reglas de formación: .
4.4.2. Reglas de transformación o inferencia: .
4.5. Definición de calcular: .
4.6. Definición de demostración o prueba: .
4.7. Utilidad del cálculo: .
4.7.1. Definición de interpretación: .
4.7.2. Resultado: .
4.7.3. Se realizan: .
4.8. Clases de cálculo.
4.8.1. Cálculo de deducción natural: .
4.8.1.1. Caracterización de premisa: .
4.8.2. Sistema axiomático: .
4.8.2.1. Caracterización de axioma: .

4.8.2.2. Caracterización de teorema: .

4.9. Construcción de un cálculo de deducción natural para enunciados.

4.9.1. Vocabulario primitivo:

4.9.1.1. Letras enunciativas.

4.9.1.2. Conectiva o signos operadores.

4.9.1.3. Signos ortográficos.

4.9.2. Reglas de formación: .

4.9.3. Reglas de transformación: .

4.9.3.1. Para cada conectiva se introducen un par de reglas, una de introducción y otra de eliminación de la conectiva. Y algunas más para agilizarlo.

5. Representación de un CDN.

5.1. Se nos ofrece unas premisas en líneas numeradas y una conclusión a la que llegar.

5.1.1. Las premisas llevan un guión y la conclusión el signo de consecuencia sintáctica.

5.2. Cada nueva fórmula obtenida con el uso de las reglas de transformación va en una nueva línea numerada, debajo de las premisas, y sin guión: línea derivada o de derivación.

5.3. La subregla de Intercambio .

5.4. Supuestos: .

7 Glosario

8 Ejercicios del tema 7.

8.1 Ejercicios sobre lenguaje natural.

1. Pon dos ejemplos no vistos en clase de equivocidad y dos de anfibología.
2. Construye un argumento anfibológico.
3. Poner ejemplos de dos expresiones con el mismo referente pero distinto significado.
4. ¿Sería paradójico:

   a. La oración de abajo —la ordenada como b— es falsa.
   b. La oración de arriba —la ordenada como a— es verdadera?

8.2 Ejercicios sobre proposiciones atómicas y moleculares

A. Señalar con una "A" si el enunciado consiste en una proposición atómica, si es molecular poner una "M", señalar cuáles son las proposiciones atómicas constituyentes y escribe la palabra o expresión formal utilizada[7].

1. La comida será hoy a las tres en punto.
2. El gran oso negro andaba perezosamente por el camino de abajo.
3. La música es muy suave o la puerta está cerrada.
4. A este perro grande le gusta cazar gatos.
5. Él pregunta por su pipa y pregunta por su escudilla.
6. Luis es un buen jugador o es muy afortunado.
7. Si Luis es un buen jugador, entonces participará en el partido del colegio.
8. Asturias está al oeste de Galicia y Huesca al este.
9. Muchos estudiantes estudian lógica en el primer año de carrera.
10. Los gatos no acostumbran a llevar abrigo.
11. Sólo si los gatos llevan abrigo pueden llevar sombrero.
12. Se puede encontrar a Juan en casa de Susana.
13. Si María canta, entonces es feliz.
14. Sólo cuando María canta es feliz.
15. Los alumnos mayores no están en la lista antes que los jóvenes.

[7] Los ejercicios del 1 al 25 están extraídos, y en ocasiones adaptados, de *Introducción a la Lógica Matemática.* P. Suppes y S. Hill. Editorial Reverte. Páginas 3-4.

16. La asignatura preferida de Jaime es la matemática.
17. Si aquellas nubes se mueven en esa dirección, entonces tendremos lluvia.
18. Si los deseos fueran caballos, entonces los mendigos cabalgarían.
19. Esta proposición es atómica o molecular.
20. El Sol calentaba y el agua estaba muy agradable
21. Si $x = 0$ entonces $x + 1 = 1$.
22. $x + y > 2$
23. $x = 1$ ó $y + z = 2$
24. $x + 1 = 5$
25. $y = 2$ y $z = 10$
26. Luis está entre Pedro y Antonio.
27. Al final fuimos al cine dos o tres personas.
28. Únicamente en los días soleados me siento feliz.
29. Cuando Pedro llega se acaba la paz en esta casa
30. Ni bebo ni fumo.
31. Fumo, pero no bebo.
32. Una de dos, o estudio música o dibujo.
33. Desde que vi a Luis a través de la ventana comprendí que todo lo que había esperado que ocurriera se realizaría pronto.
34. Me voy al cine. Tú no.
35. Juan siempre come con vino o con coca-cola.

B. Formar cuatro proposiciones moleculares utilizando las proposiciones escritas a continuación junto con una conectiva. Por ejemplo se puede utilizar el término de enlace "y" entre dos de ellas y también se puede utilizar la misma proposición atómica más de una vez. Utilícese las conectivas *una sola vez*, de manera que cada proposición molecular tenga un término distinto de enlace[8].

- El viento sopla muy fuerte.
- Pablo podría ganar fácilmente.
- La lluvia puede ser la causa de que abandone la carrera.
- Veremos qué planes hay para mañana.
- Todavía tendríamos tiempo de llegar a las siete.
- El amigo de Juan tiene razón.
- Estábamos confundidos respecto a la hora de la junta.

1.………
………

2.………
………

3.………
………

4.………
………

C. Escribe, a la derecha de los enunciados cuántas proposiciones atómicas se encuentran en cada proposición, y escribe también todas las conectivas que aparezcan[9].

1. Este no es mi día.
2. Ha llegado el invierno y los días son más cortos.
3. Muchos gérmenes no son bacterias.
4. Los anfibios se encuentran en el agua fresca o se encuentran en la tierra.
5. Si hay fallas en las masas rocosas, entonces es posible que ocurran terremotos.
6. Este número es mayor que dos o es igual a dos.
7. Si x es un número positivo entonces es mayor que 0.
8. Este chico es mi hermano y yo soy su hermana.
9. Mi puntuación es alta o recibiré una calificación baja.
10. Si usted se da prisa entonces llegará a tiempo.
11. Si $x > 0$ entonces $y = 2$.
12. Si $x + 1 = 2$ entonces $z > 0$.
13. $x = 0$ ó $y = 1$.
14. Si $x = 1$ ó $z = 2$ entonces $y > 1$.
15. Si $z > 10$ entonces $x + 2 > 10$

[8] Ejercicio extraído de *Introducción a la Lógica Matemática*. P. Suppes y S. Hill. Editorial Reverte. Página 4.
[9] Los ejercicios del 1 al 16 están extraídos de *Introducción a la Lógica Matemática*. P. Suppes y S. Hill. Editorial Reverte. Páginas 4-5.

16. $x + y = y + 1$
17. Cuando no puedo estudiar más, o salgo o veo la televisión.
18. Quédate o vete[10], pero si me molestas entonces me iré yo.
19. Si hay que ir se va, pero ir por nada es tontería.
20. O bien si Juan come pipas se alimenta, o bien sólo hace el tonto haciendo eso.

D. Primero escribe cuatro proposiciones atómicas. Forma con ellas cinco proposiciones moleculares sin repetir conectivas.

a………………………………………………………………………………………………….

b………………………………………………………………………………………………….

c………………………………………………………………………………………………….

d…………………………………………………………………………………………………

1………………………………………………………………………………………………………

2………………………………………………………………………………………………………

3………………………………………………………………………………………………………

4………………………………………………………………………………………………………

5………………………………………………………………………………………………………

8.3 Ejercicio de semisimbolización

En un enunciado como "Juan come y Pedro bebe" la palabra formal es "y", y su estructura argumentativa podría representarse semisimbolizada usando paréntesis, e introduciendo en ellos las proposiciones afectadas por la conectiva como: "(p y q)". En el caso de la conectiva negadora, como en "Juan no come" se dejaría la conectiva fuera del paréntesis para indicar que lo que sigue es a lo que ella afecta: "no (p)"

A.. Semisimboliza las proposiciones moleculares siguientes sustituyendo las proposiciones atómicas por sus símbolos lógicos e introduciendo dentro del paréntesis las proposiciones a las que afecta la conectiva. Fíjate en el ejemplo del primer ejercicio.

1. No necesito ponerme las gafas pero tú sí necesitas ponértelas…………………….(no (p) pero q)
   p q

2. Los patitos no se transforman en cisnes.

3. Daba tres pasos hacia la derecha y entonces iba dos pasos hacia delante.

4. Estos problemas no son fáciles para mí.

5. Si suena el timbre, entonces es hora de empezar la clase.

[10] "Quédate o vete" son oraciones imperativas. Sólo podrían simbolizarse considerándolas como proposiciones: "Te quedas o te vas".

6. Si la clase de Química ha empezado entonces es que ha empezado.

7. Una parte de la Luna no se ve desde la Tierra.

8. O Antonio irá al teatro o irá al cine.

9. No es cierto que las rosas sean rojas y las violetas azules.

10. Si Brasil está en Sudamérica entonces no está en el hemisferio Norte.

11. Juan está aquí y María ha salido.

12. Si $x + 1 = 10$ entonces $x = 9$.

13. O María no está aquí o Juan se ha ido.

14. Si $x = 1$ ó $y = 2$ entonces $z = 3$.

15. Si $x \neq 1$ y $x + y = 2$ entonces $y = 2$

16. Si Pedro está en casa o Juan está en el patio, entonces José es inocente.

17. $y = 0$ y $x = 0$

18. O $y = 0$ y $x \neq 0$ ó $z = 2$.

19. No ocurre que $6 = 7$.

20. Si $x + 0 = 10$ entonces $x = 5$.

21. Si canto no paso miedo.

22. Si la mañana es agradable y nos despertamos pronto, podemos ir a pescar.

B. Rellenar con lenguaje natural las siguientes estructuras. Suprimir los paréntesis al escribir las proposiciones.

1. (O p o q).
2. (p o no (p)).
3. (Ocurre a la vez que p y q).
4. (p y q).
5. No (p).
6. (Si p entonces q).
7. (Si p, q)
8. (Si no (p) entonces no (q)).

9. No ocurre que (p).
10. (Sólo si p, entonces p)
11. (Una de dos, o p o t)

C. Traducir al lenguaje natural las proposiciones siguientes manteniendo la estructura indicada. Mantener la misma proposición atómica representada por cada letra en todas sus apariciones.

1. (Si p entonces q).
2. (r o s).
3. (p y t)
4. no (q)
5. (Si s, entonces t)
6. No (p).
7. (r y t).
8. No ocurre que (s o q).
9. (p o no (s)).
10. (Si s entonces no (p)).

D. Cada una de las siguientes proposiciones es molecular. Primero indicar cuáles son las conectivas. Después escribe separadamente las proposiciones atómicas que se encuentran en cada una de las proposiciones moleculares.

1. Juan es el segundo y Tomás es el cuarto.
2. O Jaime es el ganador o Luis es el ganador
3. José no es el ganador.
4. Si Tomás es el ganador entonces él tendrá la medalla.
5. Si Tomás no es el ganador entonces debe colocarse en segundo lugar.
6. Los Alpes son montañas jóvenes y los Apalaches son montañas viejas.
7. Las arañas no son insectos.
8. Si las arañas son insectos entonces han de tener seis patas.
9. Si un metal se calienta entonces se dilata.
10. Muchos planetas son o demasiado cálidos, o demasiado fríos, para que vivan seres humanos.

8.4 Ejercicio sobre puesta de paréntesis.

A. A las siguientes proposiciones les faltan los paréntesis. Ponlos según se indica al principio de la columna:

Conjunción	**Disyunción**	**Contravalencia**	**Implicación**	**Equivalencia**	**Negación**
1. $p \vee q \wedge s$	1. $p \vee q \wedge s$	1. $p \veebar q \wedge s$	1. $p \rightarrow q \wedge s$	1. $p \leftrightarrow q \wedge s$	1. $\neg p \vee r$
2. $q \vee r \wedge s$	2. $q \vee r \wedge s$	2. $q \vee r \veebar s$	2. $q \vee r \rightarrow s$	2. $\neg q \vee r \leftrightarrow s$	2. $\neg r \rightarrow s$
3. $q \wedge r \vee t$	3. $q \wedge r \vee t$	3. $q \wedge r \veebar t$	3. $q \rightarrow r \veebar t$	3. $q \veebar r \leftrightarrow t$	3. $\neg p \wedge t$
4. $p \vee r \wedge q$	4. $p \wedge q \vee r$	4. $p \veebar q \vee r$	4. $p \rightarrow q \leftrightarrow r$	4. $\neg p \rightarrow q \leftrightarrow r$	4. $\neg p \veebar \neg q$
5. $r \wedge p \vee t$	5. $p \vee q \wedge r$	5. $p \vee q \veebar r$	5. $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$	5. $\neg p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$	5. $\neg r \leftrightarrow \neg\neg s$
6. $p \rightarrow \neg p \wedge t$	6. $p \veebar \neg p \vee t$	6. $p \rightarrow \neg p \veebar t$	6. $p \rightarrow \neg p \vee t$	6. $p \leftrightarrow \neg p \vee t$	6. $\neg \neg q \wedge \neg s$
7. $r \wedge t \veebar \neg t$	7. $r \vee t \veebar \neg t$	7. $r \wedge t \veebar \neg t$	7. $r \vee t \rightarrow \neg t$	7. $r \vee t \leftrightarrow \neg t$	7. $\neg p \leftrightarrow q \wedge s$
8. $\neg p \leftrightarrow r \wedge s$	8. $\neg p \leftrightarrow r \vee s$	8. $\neg p \leftrightarrow r \veebar s$	8. $\neg p \leftrightarrow r \rightarrow s$	8. $\neg p \leftrightarrow r \wedge s$	8. $\neg q \vee r \leftrightarrow s$
9. $q \rightarrow t \wedge t$	9. $q \rightarrow t \vee t$	9. $q \rightarrow t \veebar t$	9. $q \rightarrow t \vee t$	9. $q \leftrightarrow t \vee t$	9. $\neg q \veebar r \leftrightarrow t$
10. $t \veebar \neg p \wedge \neg p$	10. $t \veebar \neg p \vee \neg p$	10. $\neg t \veebar \neg p \veebar p$	10. $t \veebar \neg p \rightarrow p$	10. $t \veebar \neg p \leftrightarrow p$	10. $\neg p \vee q \leftrightarrow r$

B. Junto a cada proposición molecular escrita a continuación se ha puesto el nombre del tipo de proposición molecular a la que pertenece. Añadir los paréntesis necesarios

I.		II.	
1. disyunción	$s \vee t \wedge r$	1. conjunción	1. $p \leftrightarrow q \wedge s$
2. conjunción	$t \vee s \wedge q$	2. negación	2. $\neg q \vee r \leftrightarrow s$
3. conjunción	$t \wedge s \vee r$	3. equivalencia	3. $q \veebar r \leftrightarrow t$
4. disyunción	$p \vee q \wedge t$	4. implicación	4. $\neg p \rightarrow q \leftrightarrow r$
5. disyunción	$p \wedge q \vee r$	5. negación	5. $\neg p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$
6. contravalencia	$q \rightarrow p \veebar s$	6. disyunción	6. $p \leftrightarrow \neg p \vee t$
7. implicación	$p \rightarrow r \wedge s$	7. equivalencia	7. $r \vee t \leftrightarrow \neg t$
8. equivalencia	$p \leftrightarrow q \vee r$	8. negación	8. $\neg p \leftrightarrow r \wedge s$
9. implicación	$p \wedge q \rightarrow r$	9. disyunción	9. $q \leftrightarrow t \vee t$
10. contravalencia	$r \veebar p \rightarrow q$	10. contravalencia	10. $t \veebar \neg p \leftrightarrow p$
11. conjunción	$r \rightarrow q \wedge s$	11. negación	11. $\neg q \vee r \leftrightarrow s$
12. implicación	$p \rightarrow r \vee q$	12. contravalencia	12. $\neg q \veebar r \leftrightarrow t$
13. disyunción	$r \vee q \rightarrow q$	13. disyunción	13. $\neg p \vee q \leftrightarrow r$

8.5 Ejercicios de simbolización.

A. Simboliza las siguientes proposiciones moleculares asignando los nombres p, q, r …, correlativamente a la primera, segunda, tercera…, proposición que aparezca en el enunciado, y de acuerdo al siguiente ejemplo:

1. O Pedro es presidente y Juan es tesorero, o Jaime es tesorero $(p \wedge q) \vee r$
   p q r

2. Él está equivocado, y o yo tengo razón o quedaré sorprendido

3. Una de dos $x > 1$, ó $x < 1$ e $y = 7$

4. Si x es menor que 2, entonces x es igual a 1 o x es igual a 0

5. Pedro es presidente, y o Juan es tesorero, o Jaime es tesorero

6. No es verdad que sólo cuando como me divierto. O como o bebo

7. Ramón es su hermano y una de dos o Rosa es su hermana o Javier es su hermano

8. Cuando no te veo sufro y me desespero.

9. Iba al cine de la esquina; si no me avisas de que había cerrado me hubiera dado el paseo.

10. O Jorge es el capitán del equipo o lo es Jose. Carlos es su entrenador.

11. O $x > 5$ e $y < 7$ o $x = 3$

12. Si hoy es martes no jugaría al mus ni al póquer.

13. Como pipas porque me alimentan

B. Simboliza de modo completo los ejercicios 8.2-A, 8.2-B, 8.2-C, 8.2-D, 8.3-A, 8.3-C y 8.3-D
C. Indica, subrayándolas, las proposiciones atómicas; pon la simbolización completa a la derecha.

1. El área del triángulo ABC es igual al área del triángulo DEF, o el área del triángulo ABC es menor que el área del triángulo DEF
2. En el hemisferio Sur julio no es un mes de verano.
3. Sólo si como paella me sale esa erupción tan molesta.
4. Los tubos de neón no son incandescentes.
5. Juan vive en nuestra calle y Pedro en la manzana contigua.
6. Si es un ácido, entonces contiene el elemento hidrógeno.
7. O Jaime es puntual o Tomás llega tarde.
8. El juego ha empezado pero encontraremos sitio para sentarnos.
9. Una de dos o me acompañas a comer o comeré sola.
10. Sólo si hace el suficiente frío entonces el lago se helará.
11. Si las luces están encendidas, entonces la familia Álvarez está en casa.
12. Ni se te ocurra quitarme mi disco.
13. Tomará parte en el salto de altura o correrá la media milla.
14. Cuando las luces están encendidas es porque la familia Álvarez está en casa.
15. Los discos antiguos de José son buenos, pero los modernos son todavía mejor
16. Una de dos o el bote cruzó el estrecho o se lo tragaron las olas
17. Te harás daño a causa de tu temeridad.
18. Sólo si Rosa tiene 20 años entonces Luis tiene los sesenta
19. Iré a tu cumpleaños porque me has invitado
20. Ni en Madrid ni en Barcelona me gustaría vivir
21. No ocurre que las estrellas no estén hechas de hidrógeno
22. Hemos de llegar aquí antes, u otro recibirá el premio
23. Una de dos o Juan será elegido o será destinado para un nuevo puesto
24. Metió el pie en el hoyo y no lo sacó sin esfuerzo
25. O la puerta está cerrada o no lo está
26. Si pone la palabra “no” es que la proposición es una negación.

27. Es verdad que Juan está dispuesto a ir contigo a ese cine de barrio; yo no.

28. Nunca comeré jamón.

29. Siempre que tomo vitamina C paso el invierno sin constiparme.

30. Cuando como no paso hambre

D. Traducir al lenguaje natural las siguientes expresiones lógicas:

1. $p \wedge q$

2. $\neg (p \wedge q)$

3. $\neg p \wedge q$

4. $\neg (p \rightarrow q)$

5. $p \rightarrow \neg q$

6. $\neg \neg p \leftrightarrow q$

7. $\neg p \vee \neg q$

8. $\neg (\neg p \vee \neg q)$

9. $\neg (p \leftrightarrow \neg p)$

10. $\neg \neg p$

E. Simboliza completamente las siguientes proposiciones moleculares asignando los nombres p, q, r, s, t correlativamente a la primera, segunda, tercera…, proposición atómica que aparezca en el enunciado.

1. O Juan es alto y Pedro bajo o Pedro es rubio y Juan es moreno.
2. Si una sustancia orgánica se descompone, entonces sus componentes se transforman en abono y fertilizan el suelo.
3. Si no ocurre que Juan no sea español, entonces Luis es rubio o es español.
4. Me iré, a condición de que tú me lo pidas.
5. Sólo cuando habla o mastica chicle, mueve la boca.
6. No se puede decir que es blanco y negro porque no se entiende.
7. Él no te dirá nada sólo en el caso de que, si vuelve, te encuentre trabajando.
8. O te quedas en casa y comes de lo que hay, o te vas a cenar al bar.
9. No lo reconoces pero me has engañado.
10. Una de dos, o llueve o no llueve, y llueve; luego no llueve.
11. Ni quito ni pongo rey pero ayudo a mi señor.
12. No es cierto que Pedro sea piloto y su hermano conductor de autobús.
13. En caso de que me den la beca, si la acepto, te lo comunicaré.
14. O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.
15. Si no voy al cine contigo no es porque ni te odie ni me aburras.
16. Si llegas después de las 10 te encontrarás con la puerta cerrada y estaremos enfadados.
17. Ocurre que ni yo estoy equivocado ni la pregunta número uno es cierta, y además la pregunta número dos es falsa.
18. Una de dos, o yo estoy equivocado y la pregunta número uno es cierta o la pregunta número dos es falsa.
19. No ocurre que ni Juana ni Rosa sean hermanas suyas.
20. Si se conoce el período del movimiento de la Luna y se sabe la distancia de la Tierra a la Luna, entonces se puede calcular la aceleración centrípeta de la Luna.

21. Una de dos, o sus deberes están terminados, o si no están terminados tendrá que hacerlos por la noche.

22. No todas las regiones de África tienen un clima cálido y húmedo, y no toda el África ecuatorial es una tierra de vegetación espesa y exuberante.

23. Sólo si son las diez la sesión de la Asamblea General ha empezado, y ahora son las diez.

24. No ocurre que, o las estrellas muy lejanas presenten paralaje o aparezcan en el telescopio como discos. Tampoco ocurre que sólo si no están cercanas se le pueda encontrar el paralaje.

25. Si este mineral no es duro, entonces o no está compuesto de cristales de cuarzo o yo de esto no tengo ni idea.

26. Si el plan de desarrollo no tiene éxito, entonces no me compro un coche de carreras, pero me lo compro; luego no es verdad que el plan de desarrollo no tenga éxito.

27. Sólo si hoy es jueves entonces mañana es viernes; luego si y sólo si mañana no es viernes entonces hoy no es el día de los santos inocentes.

28. Si el vehículo queda inmovilizado durante más de 48 horas y las reparaciones han de durar al menos 8 horas, la compañía de seguros pone a disposición de cada uno de los asegurados que viajaban en el vehículo un billete de tren o de avión.

29. Cuando Juan va al cine ve películas de terror, aunque sé que las películas de terror le dan miedo; es por ello por lo que pienso que le gusta que le asusten o también es posible que esté loco. Estoy seguro que no le gusta que le asusten; luego está loco.

30. Si y sólo si Juan es panadero entonces una de dos, o Luis es arquitecto o Juan no es arquitecto. Sabemos que no es posible que si Juan es panadero Luis sea arquitecto. Luego Luis es panadero y Juan es arquitecto.

31. Cállate, cierra la puerta del armario, y deja en paz los juguetes.

32. Amo a Eloísa porque está debajo de un almendro, y todo eso me hace gracia. Sólo si no me hiciera gracia en vez de amarla la pegaría, o no. Por lo tanto, o me hace gracia o no la digo nada

F. Escribe enunciados en lenguaje natural para las siguientes expresiones lógicas

1. $p \rightarrow (q \leftrightarrow (r \vee s))$

2. $\neg\neg\, p \rightarrow \neg\neg(q \vee r)$

3. $(\neg\, p \veebar q) \wedge \neg\, (r \vee q)$

4. $\neg\neg\, (p \leftrightarrow \neg\neg q)$

5. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

6. $p \vee \neg\, (\, q \rightarrow \neg\, (\, p \vee \neg\, r))$

7. $\neg\, (\neg\, p \vee \neg\neg\, q)$

8. $p \rightarrow (p \veebar (\neg\, q \rightarrow (r \wedge s)\,)\,)$

9. $((p \leftrightarrow \neg\, q) \wedge r) \;\vee\; (s \rightarrow (t \vee r))$

8.6 Ejercicio de tablas de verdad

A. Realiza las siguientes tablas de verdad. Di de qué tipo es el enunciado, y si es, o no, correcto.

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
2. $p \wedge (q \wedge \neg q)$
3. $(q \rightarrow p) \veebar (r \wedge q)$
4. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
6. $(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
7. $\neg(p \wedge r) \veebar (\neg p \wedge \neg r)$
8. $\neg (((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$
9. $(\neg p \wedge q) \rightarrow (\neg p \veebar \neg(\neg p \wedge q))$
10. $\neg((p \rightarrow q) \veebar (r \leftrightarrow (\neg p \wedge q))) \rightarrow ((\neg r \rightarrow p) \wedge (q \leftrightarrow (\neg p \vee r)))$
11. $\neg((p \rightarrow \neg((q \vee (\neg r \vee p)) \leftrightarrow q)) \veebar \neg r)$
12. $\neg((p \veebar (\neg(q \rightarrow (p \vee r)) \leftrightarrow r)) \wedge p) \veebar p$
13. $\neg(\neg p \vee (\neg(q \rightarrow q) \veebar q)) \leftrightarrow \neg p$
14. $(p \rightarrow \neg(\neg\neg p \leftrightarrow q)) \veebar (q \vee p)$
15. $\neg(\neg p \leftrightarrow (\neg(q \leftrightarrow q) \vee q)) \wedge \neg p$
16. $(p \veebar \neg(\neg\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow (p \wedge q)$
17. $p \vee \neg(\neg(q \veebar (p \rightarrow p)) \leftrightarrow \neg q)$
18. $p \leftrightarrow \neg((q \rightarrow \neg(\neg q \veebar p)) \wedge q)$
19. $\neg((p \veebar \neg(\neg p \vee q)) \rightarrow (\neg\neg q \leftrightarrow p)) \wedge r$
20. $\neg(\neg p \wedge ((q \leftrightarrow \neg\neg r) \rightarrow (\neg(q \vee p) \veebar r)))$

B. Realiza la primera fila de las siguientes tablas de verdad.

1. $\neg((p \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge p)) \rightarrow (\neg\neg q \vee p)) \veebar r$
2. $\neg(\neg p \rightarrow ((q \veebar \neg\neg r) \leftrightarrow (\neg(q \veebar p) \vee r)))$
3. $\neg(p \wedge \neg(\neg q \vee (\neg(p \vee (r \leftrightarrow (\neg p \rightarrow r))))))$
4. $\neg(\neg p \leftrightarrow ((p \rightarrow \neg\neg r) \vee (\neg(p \vee q) \wedge r)))$
5. $\neg(\neg(\neg p \veebar \neg(p \rightarrow q)) \leftrightarrow (r \vee (p \wedge q)))$
6. $\neg(p \rightarrow (p \vee \neg((q \leftrightarrow \neg(p \veebar \neg p)) \wedge r)))$
7. $\neg((\neg(p \rightarrow q) \wedge p) \leftrightarrow (r \veebar (\neg p \vee \neg(\neg q \wedge r))))$
8. $\neg(\neg((p \rightarrow q) \wedge r) \vee \neg(\neg q \leftrightarrow (p \vee \neg(\neg q \wedge r))))$
9. $\neg((\neg(\neg p \wedge q) \veebar p) \rightarrow (r \vee (\neg p \vee \neg(\neg q \rightarrow r))))$
10. $\neg(\neg((p \veebar q) \vee r) \leftrightarrow \neg(\neg q \wedge (p \vee \neg(\neg q \rightarrow r))))$
11. $\neg((\neg p \veebar (\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (r \wedge \neg(p \vee \neg p))) \rightarrow \neg p$
12. $\neg(\neg((p \wedge q) \leftrightarrow r) \vee \neg(\neg q \veebar (p \veebar \neg(\neg q \rightarrow r))))$
13. $\neg((\neg((p \veebar (q \rightarrow \neg p)) \leftrightarrow (r \veebar \neg(p \wedge q))) \vee r) \rightarrow p)$
14. $p \rightarrow (q \vee \neg((\neg(p \wedge q) \veebar r) \leftrightarrow (\neg(\neg p \rightarrow q) \vee p)))$

8.7 Ejercicio de cálculo de deducción natural.

1 $\vdash q \wedge \neg p$

— 1. $p \veebar q$
— 2. $\neg p$

2 $\vdash \neg p \vee r$

— 1. $p \leftrightarrow q$
— 2. $\neg q$

3 $\vdash q$

— 1. p
— 2. $(p \vee r) \rightarrow s$
— 3. $s \rightarrow (t \wedge q)$

4 $\vdash \neg q \rightarrow s$

— 1. $p \leftrightarrow \neg r$
— 2. $\neg p \rightarrow q$
— 3. $\neg r \rightarrow s$

5 $\vdash r$

— 1. $r \vee q$
— 2. $\neg q \vee \neg p$
— 3. p

6 $\vdash q \rightarrow t$

— 1. $q \leftrightarrow \neg r$
— 2. $p \rightarrow r$
— 3. $\neg p \rightarrow t$

7 $\vdash p$

— 1. $\neg q \veebar p$
— 2. q

8 $\vdash q$

— 1. $\neg (\neg q \wedge p)$
— 2. $\neg t \rightarrow p$
— 3. $\neg r \wedge \neg t$

9 $\vdash q$

— 1. $p \vee (q \vee r)$
— 2. $\neg r \wedge \neg p$

10 $\vdash \neg (r \vee p)$

— 1. $\neg r$
— 2. $p \rightarrow r$

11 $\vdash \neg p$

— 1. $\neg t \vee \neg p$
— 2. $\neg r \vee t$
— 3. r

12 $\vdash \neg q \rightarrow \neg t$

— 1. $\neg p \rightarrow \neg t$
— 2. $p \rightarrow q$

13 $\vdash s \rightarrow t$

— 1. $\neg p \rightarrow \neg s$
— 2. $\neg t \rightarrow \neg p$

14 $\vdash r$

— 1. p
— 2. q
— 3. $(p \wedge q) \rightarrow r$

15 $\vdash \neg q \wedge r$

— 1. $\neg q \vee \neg t$
— 2. $\neg t \rightarrow \neg r$
— 3. r

16 $\vdash r$

— 1. $p \leftrightarrow q$
— 2. $r \leftrightarrow q$
— 3. p

17 $\vdash s$

— 1. $(p \wedge r) \rightarrow s$
— 2. $\neg t \vee p$
— 3. $t \wedge r$

18 $\vdash t$

— 1. p
— 2. $p \vee q \rightarrow t$

19 $\vdash t$

— 1. $p \rightarrow t$
— 2. r
— 3. $r \rightarrow \neg\neg q$
— 4. $q \rightarrow p$

20 $\vdash \neg(q \vee p)$

— 1. $\neg r \leftrightarrow p$
— 2. $\neg q \vee \neg r$
— 3. $\neg p$

21 $\vdash \neg s$

— 1. $p \rightarrow \neg r$

— 2. p

— 3. $\neg (s \wedge \neg r)$

22 $\vdash t$

— 1. $p \wedge (q \vee r)$

— 2. $(p \vee r) \rightarrow (s \wedge t)$

23 $\vdash s \vee \neg q$

— 1. $p \not\vee q$

— 2. $\neg q$

— 3. $\neg s \rightarrow \neg p$

24 $\vdash t$

— 1. $p \rightarrow \neg r$

— 2. $(q \vee \neg p) \rightarrow t$

— 3. r

25 $\vdash \neg r$

— 1. $r \not\vee t$

— 2. t

26 $\vdash r$

— 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

— 2. $p \wedge q$

27 $\vdash \neg r \not\vee \neg s$

— 1. $\neg r \rightarrow s$

— 2. $\neg r$

28 $\vdash t$

- 1. $\neg(p \wedge s)$

- 2. s

- 3. $\neg t \rightarrow p$

29 $\vdash \neg\neg p$

- 1. $p \leftrightarrow q$

- 2. $\neg\neg r$

- 3. $s \leftrightarrow q$

- 4. $r \rightarrow s$

30 $\vdash \neg(s \vee p)$

— 1. $\neg q \rightarrow p$

— 2. $\neg q \vee \neg s$

— 3. $\neg p$

31 $\vdash \neg r$

— 1. $\neg p \vee \neg q$

— 2. p

— 3. $r \rightarrow q$

32 $\vdash q \rightarrow s$

— 1. $\neg p \leftrightarrow \neg q$

— 2. $t \rightarrow \neg p$

— 3. $\neg s \rightarrow t$

33 $\vdash \neg s \rightarrow \neg r$

- 1. $p \rightarrow \neg r$

- 2. $\neg p \rightarrow s$

34 $\vdash \neg r \not\vee \neg s$

— 1. $\neg r \rightarrow s$

— 2. $\neg r$

35 $\vdash t$

— 1. $\neg(p \wedge q) \rightarrow t$

— 2. $r \vee \neg p$

— 3. $\neg r$

36 $\vdash p \wedge \neg r$

— 1. $p \leftrightarrow q$

— 2. $q \vee r$

— 3. $\neg r \wedge t$

37 $\vdash r$

- 1. $\neg(q \wedge \neg r)$

- 2. q

38 $\vdash t$

— 1. $p \rightarrow \neg r$

— 2. $(q \vee \neg p) \rightarrow t$

— 3. r

39 $\vdash p \not\vee q$

— 1. $p \wedge \neg q$

40 $\vdash \neg q \vee r$

— 1. $t \vee p$

— 2. $\neg p \wedge \neg r$

— 3. $q \rightarrow \neg t$

41 $\vdash \neg q$

- 1. $q \rightarrow r$

- 2. $\neg(\neg s \vee \neg\neg r)$

42 $\vdash \neg(q \vee p)$

— 1. $\neg r \leftrightarrow p$

— 2. $\neg q \vee \neg r$

— 3. $\neg p$

43 $\vdash \neg q \vee r$

— 1. $t \vee p$

— 2. $\neg p \wedge \neg r$

— 3. $q \rightarrow \neg t$

44 $\vdash \neg p \rightarrow r$

— 1. $\neg p \rightarrow s$

— 2. $\neg t \rightarrow \neg s$

— 3. $t \rightarrow r$

45 $\vdash p \wedge \neg r$

- 1. $p \leftrightarrow q$
- 2. $q \vee r$
- 3. $\neg r \wedge t$

46 $\vdash t$

— 1. $\neg\neg p$

— 2. $\neg s \vee t$

— 3. $\neg s \leftrightarrow \neg p$

47 $\vdash \neg t$

— 1. $q \vee \neg s$

— 2. $q \leftrightarrow \neg t$

— 3. s

48 $\vdash \neg s \veebar \neg q$

— 1. $\neg r \rightarrow \neg s$

— 2.$(s \vee t) \vee (\neg s \vee \neg q)$

— 3. $\neg r \wedge \neg t$

49 $\vdash q \rightarrow t$

— 1. $q \rightarrow \neg r$

— 2. $p \rightarrow r$

— 3. $\neg p \rightarrow t$

50 $\vdash q \vee r$

— 1. $\neg s \vee p$

— 2. $\neg p$

— 3. $\neg q \leftrightarrow s$

51 $\vdash \neg(s \wedge \neg p)$

— 1. $\neg q \rightarrow p$

— 2. $\neg q$ v $\neg s$

— 3. $\neg p$

52 $\vdash s \rightarrow t$

— 1. $q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))$

— 2. $q \wedge r$

53 $\vdash s \wedge \neg q$

— 1. $p \vee q$

— 2. $\neg q$

— 3. $\neg s \rightarrow \neg p$

54 $\vdash \neg p \rightarrow r$

— 1. $\neg p \rightarrow s$

— 2. $\neg t \rightarrow \neg s$

— 3. $t \rightarrow r$

55 $\vdash \neg s \veebar \neg q$

— 1. $\neg r \rightarrow \neg s$

— 2. $q \wedge \neg t$

— 3. $(s \vee t) \vee (\neg s \vee \neg q)$

— 4. $\neg r$

56 $\vdash p$

— 1. $s \rightarrow (p \vee q)$

— 2. $\neg\neg s$

— 3. $\neg q$

8.8 Ejercicio de CDN con estrategias

A. Resolver los siguientes problemas utilizando el Teorema de Deducción.

1. $\vdash (p \wedge r) \rightarrow t$

— 1 $p \rightarrow q$

— 2 $r \rightarrow s$

— 3 $(s \wedge q) \rightarrow t$

2. $\vdash (p \wedge r) \rightarrow s$

— 1 $p \rightarrow q$

— 2 $q \rightarrow (r \rightarrow t)$

— 3 $t \rightarrow s$

3. $\vdash p \rightarrow r$

— 1 $p \rightarrow (q \wedge \neg\neg r)$

4. $\vdash p \rightarrow r$

— 1 $p \rightarrow q$

— 2 $q \rightarrow r$

5. $\vdash p \rightarrow \neg (p \rightarrow t)$

— 1 $p \rightarrow (r \wedge s)$

— 2 $s \rightarrow t$

— 3 $t \rightarrow \neg (p \rightarrow t)$

6. $\vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

— 1 p

7. $\vdash r \rightarrow (p \rightarrow s)$

— 1 $p \rightarrow q$

— 2 $r \rightarrow (q \rightarrow s)$

8. $\vdash p \rightarrow (s \rightarrow t)$

— 1 $p \rightarrow (s \rightarrow r)$

— 2 $r \rightarrow t$

9. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

— 1 $p \rightarrow q$

10. $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

11. $\vdash p \rightarrow ((r \vee s) \rightarrow (\neg r \rightarrow s))$

12. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

13. $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

14. Realiza por teorema de deducción todos los problemas que tengan que concluir un implicador como conectiva principal.

B. Resolver los siguientes problemas utilizando la Reducción al Absurdo.

1. $\vdash t$

— 1 p

— 2 $(p \vee q) \rightarrow t$

2. $\vdash r$

— 1 p

— 2 q

— 3 $(p \wedge q) \rightarrow r$

3. $\vdash q \vee r$

— 1 $\neg s \vee p$

— 2 $\neg p$

— 3 $\neg q \leftrightarrow s$

4. Realiza por Reducción al Absurdo al menos 10 ejercicios más cualesquiera.

C. Realiza por Casos los siguientes ejercicios.

1. $\vdash r$

— 1 $p \vee q$

— 2 $p \rightarrow q$

— 3 $q \rightarrow r$

2. $\vdash \neg r$

— 1 $\neg p \vee \neg q$

— 2 $r \rightarrow p$

— 3 $r \rightarrow q$

3. $\vdash \neg r \vee \neg s$

— 1 $r \rightarrow p$

— 2 $\neg p \vee \neg q$

— 3 $s \rightarrow q$

8.9 Ejercicios de simbolización y cálculo.

El inspector Leslie Craig de Scotland Yard ha consentido amablemente en dar a conocer algunas historias de sus casos para beneficio de aquellos que estén interesados en la aplicación de la lógica a la solución de casos criminales.

1. Empecemos con un caso simple. Un enorme botín ha sido robado de un almacén. El delincuente (o delincuentes) ha(n) transportado los géneros robados en un coche. Tres famosos delincuentes, A, B, C, fueron conducidos a Scotland Yard para ser interrogados. Se establecieron los siguientes hechos:

(1) Ninguna otra persona distinta de A, B, C, estaba implicada en el robo.
(2) C no se embarca nunca en un asunto sin utilizar a A (y posiblemente a otros) como cómplice.
(3) B no sabe conducir

¿Es A inocente o culpable? Para resolver este ejercicio hace falta aplicar una nueva regla de transformación:

$$(A \vee B) \vee C$$

Regla de asociación del disyuntor: ==========

$$A \vee (B \vee C)$$

2. Otro caso simple, nuevamente de robo; A, B, C, fueron conducidos a interrogatorio y se establecieron los siguientes hechos:

(1) Nadie fuera de A, B, C, está implicado.
(2) A no trabaja nunca sin contar al menos con un cómplice
(3) C es inocente

¿Es B inocente o culpable? Para resolver este ejercicio hace falta aplicar una nueva regla de transformación:

A

Regla de Idempotencia ====

A

3. "¿Qué haría usted con los siguientes hechos?", preguntó el inspector Craig al sargento McPherson.

(1) Si A es culpable y B inocente, entonces C es culpable.

(2) C no trabaja nunca solo.

(3) A no trabaja nunca con C

(4) Nadie distinto a A, B, C, estaba

implicado, y al menos uno de estos es culpable.

El sargento se rascó la cabeza y dijo, "Me temo que no mucho, señor. ¿Puede usted inferir a partir de estos hechos quienes son inocentes y cuáles culpables?". "No", respondió Craig, "pero hay suficiente material aquí para inculpar definitivamente a uno de ellos".

¿Quién de ellos es necesariamente culpable?

4. EL CASO DE LA TIENDA DE MCGREGOR

El señor McGregor, un comerciante londinense, telefoneó a Scotlan Yard para decir que su tienda había sido robada. Se capturaron tres sospechosos, A, B, C, para su interrogatorio. Se establecieron los siguientes hechos:

(1) Cada uno de los tres hombres, A, B, C, había estado en la tienda el día del robo, y nadie más había estado en ella ese día.
(2) Si A era culpable, entonces tenía un cómplice, y sólo uno.
(3) Si B es inocente también lo es C.
(4) Si dos y sólo dos, son culpables, entonces A es uno de ellos.
(5) Si C es inocente, también lo es B.

¿A quién inculpó el inspector Craig? Es necesaria la siguiente regla

	$(A \vee B) \vee C$
Regla de asociación del disyuntor:	==========
	$A \vee (B \vee C)$

5. EL CASO DE LOS CUATRO

Esta vez cuatro sospechosos, A, B, C, D, fueron capturados para ser interrogados respecto a un robo. Se sabía con seguridad que al menos uno de ellos era culpable y que nadie distinto a estos cuatro estaba implicado. Del interrogatorio resultaron los siguientes hechos:

(1) A era definitivamente inocente.
(2) Si B era culpable, entonces tenía un cómplice, y sólo uno.
(3) Si C era culpable, entonces tenía dos cómplices, y sólo dos.

El inspector Craig estaba especialmente interesado en saber si D era inocente o culpable, ya que D era un delincuente particularmente peligroso. Por fortuna, los hechos anteriores son suficientes para determinar esta cuestión. ¿Es D culpable o no?

6. Este caso y el siguiente hacen referencia al juicio de tres hombres, A, B, C, por participación en un robo. En el caso presente, se establecieron los dos hechos siguientes:

(1) Si A es inocente o B es culpable, entonces C es culpable.
(2) Si A es inocente, entonces C es inocente.

¿Puede establecerse la culpabilidad de uno cualquiera de ellos en particular?

7. En este caso se establecieron los siguientes hechos:

(1) Al menos uno de los tres es culpable.
(2) Si A es culpable y B inocente, entonces C es culpable.

Esta evidencia es insuficiente para condenar a ninguno de los tres, pero apunta a dos de ellos de modo tal que uno de esos dos tiene que ser culpable. ¿Quiénes son esos dos?

8. En este caso, más interesante, estaban implicados cuatro acusados A, B, C, D, y fueron establecidos los cuatro hechos siguientes:

(1) Si tanto A como B son culpables, entonces C era cómplice.
(2) Si A es culpable, entonces al menos uno de los dos, B o C, era cómplice.
(3) Si C es culpable, entonces D era cómplice.
(4) Si A es inocente entonces D es culpable

¿Quién es definitivamente culpable?

9. De nuevo tenemos cuatro acusados A, B, C, D. Se establecieron los siguientes hechos:

(1) Si A era culpable, entonces B era cómplice.
(2) Si B es culpable, entonces o bien C era cómplice o bien A es inocente.
(3) Si D es inocente entonces A es culpable y C es inocente.
(4) Si D es culpable, también lo es A.

¿Quiénes son inocentes y quiénes culpables?